

Konzepte für elastische, parallele Manipulatoren zur Regelung der Strukturschwingungen

Krzysztof Mariusz Stachera

Braunschweig 2009

Konzepte für elastische, parallele Manipulatoren zur Regelung der Strukturschwingungen

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik und Physik
der Technischen Universität
Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

von

Dipl.-Ing. Krzysztof Mariusz Stachera
aus Tschenstochau, Schlesien, Polen
z Częstochowy, Śląska, Polski

Eingereicht am:	22. September 2008
Mündliche Prüfung am:	08. Januar 2009
Referenten:	Prof. Dr.-Ing. Walter Schumacher, Technische Universität Braunschweig Prof. Dr.-Ing. Harald Aschemann, Universität Rostock
Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. Wolf-Rüdiger Canders, Technische Universität Braunschweig

2009

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungstechnik der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 562 „Robotersysteme für Handhabung und Montage“.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Walter Schumacher für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die wissenschaftliche Freiheit, die maßgeblich zu dem erfolgreichen Abschluss dieser Arbeit führte. Herrn Prof. Dr.-Ing. Harald Aschemann von der Universität Rostock danke ich für die Teilnahme am Promotionsverfahren und für die Ratschläge zum Inhalt meiner Arbeit. Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolf-Rüdiger Canders möchte ich für die Übernahme des Vorsitzes der Promotionskommission danken.

Meinen Arbeitskollegen danke ich für die stets offene und motivierende Arbeitsatmosphäre. Bei den Mitarbeitern der Verwaltung und der Werkstatt bedanke ich mich für die freundliche und fachliche Unterstützung bei meiner Arbeit. Denjenigen, mit denen ich gemeinsam an Projekten arbeiten durfte, danke ich, ohne im Einzelnen Namen nennen zu wollen, herzlich für die gegenseitige Unterstützung, interessante fachliche Gespräche und erfolgreiche zielorientierte Zusammenarbeit. Den Mitarbeitern des Sonderforschungsbereiches 562 aus den verschiedenen Fachbereichen, die allesamt zu dem interdisziplinären Gebiet der Robotik gehören, gilt mein herzlicher Dank für die gemeinsame Forschungsarbeit. Sie gab mir die einmalige Gelegenheit, die Robotik fachübergreifend aus den verschiedenen Perspektiven in einem breiteren wissenschaftlichen Kontext zu betrachten. Die zahlreichen Diskussionen, Vorträge und Sitzungen trugen dabei zu einem besseren Verständnis der Probleme und der Lösungsansätze in dem so komplexen robotischen Bereich bei.

Braunschweig, Januar 2009

Krzysztof Mariusz Stachera

Moin Rodzicom
Für meine Eltern

Cogito ergo sum

Renatus Cartesius

**Alle Hindernisse und Schwierigkeiten sind Stufen,
auf denen wir in die Höhe steigen.**

Friedrich Wilhelm Nietzsche

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Stand der Technik	3
1.2.1	Modellierung	4
1.2.2	Regelung	6
1.3	Sonderforschungsbereich - SFB 562	8
1.4	Gliederung der Arbeit	10
2	Elastizität und Schwingungen in der Roboterstruktur	12
2.1	Quellen von Schwingungen in der Roboterstruktur	12
2.2	Elastizitätstheorie	13
2.2.1	Spannungszustand und Deformation	13
2.2.2	Hookesches Gesetz	15
2.3	Modellierung eines elastischen Roboterarmes	16
2.3.1	Kontinuierliches Modell - Partielle Differenzialgleichung	18
2.3.2	Diskretes Modell - Gewöhnliche Differenzialgleichungen	23
2.3.3	Zusammenfassung	34
2.4	Relativkinematik	35
2.5	Analyse des Schwingungsvorgangs	38
3	Kinematik eines elastischen parallelen Manipulators	41
3.1	Problemstellung der Kinematik	41
3.2	Direkte Kinematik	43
3.2.1	Denavit-Hartenberg Methode	43
3.2.2	Geometrische Methode	44
3.2.3	Trigonometrische Methode	46
3.3	Inverse Kinematik	49
3.4	Bestimmung des Arbeitsraumes	51
3.4.1	Singularitäten der Jacobimatrix	52
3.4.2	Graphische Methode	55
3.4.3	Analytische Methode	59
4	Dynamik eines elastischen parallelen Manipulators	62
4.1	Modellierung der Roboterdynamik	62
4.2	Lagrangeschen Bewegungsgleichungen erster Art	64
4.2.1	Inverse Dynamik - ID	65
4.2.2	Direkte Dynamik - DD	66

4.2.3	Eigenschaften	66
4.3	Lagrange - D'Alembert - Formalismus	67
4.3.1	Inverse Dynamik - ID	67
4.3.2	Direkte Dynamik - DD	72
4.3.3	Eigenschaften	72
4.4	Jacobimatrix paralleler Manipulatoren	73
4.4.1	Herleitung der Jacobimatrix	73
4.4.2	Dualität der Jacobimatrizen	75
4.5	Dekomposition der direkten Dynamik	76
4.5.1	Direkte Dynamik - DD	77
4.5.2	Eigenschaften	80
4.5.3	Verifikation der Methode	82
4.6	Dynamikgleichung in den Aufgabenkoordinaten	85
4.7	Analyse der Eigenschaften der Roboterstruktur	87
4.7.1	Kraftellipsoiden	87
4.7.2	Trägheitsellipsoiden	90
5	Komponenten der Strukturregelung	95
5.1	Systemarchitektur	96
5.2	Kommunikationsarchitektur	97
5.3	Adaptronikknoten	98
5.4	Sensoren und Aktoren	101
5.4.1	Dehnungsmessstreifen - DMS	103
5.4.2	Beschleunigungssensor	105
5.4.3	Piezosensoren	107
5.4.4	Piezoaktoren	108
6	Regelung elastischer Roboterstruktur	112
6.1	Problemstellung der Regelung	112
6.2	Bahnplanung kontra Schwingungen	114
6.3	Lineare Kennfeldregler (Gain-Scheduling-Controllers)	120
6.4	Nichtlineare Regelung	123
6.4.1	Der lineare Regler	123
6.4.2	Posenabhängige Anpassung der Reglerparameter	132
6.4.3	Simulative Untersuchung der neuen Regelung	133
6.5	Untersuchungen an der Roboterstruktur	135
6.5.1	Identifikation der Roboterstruktur	136
6.5.2	Schwingungsunterdrückung	142
7	Zusammenfassung und Ausblick	149
	Literatur	152

Bildverzeichnis

1.1	Parallele Manipulatoren des Sonderforschungsbereiches - SFB 562	9
2.1	Spannungszustand und Deformation eines elastischen Körpers	14
2.2	Deformation eines Roboterarmes	17
2.3	Eigenformen für eine „gelenkig-gelenkig“ Randbedingung	22
2.4	Finite Elemente Methode - Diskretisierung eines elastischen Roboterarmes	29
2.5	Feder-Masse-Dämpfer-Ersatzmodell	38
3.1	Herleitung der kinematischen Beziehungen	43
3.2	Kinematische Beziehungen bei der trigonometrischen Methode	47
3.3	Herleitung der inversen Kinematik	50
3.4	Konfigurationen des parallelen Manipulators FÜNFGELENK	54
3.5	Definition des Arbeitsraumes des FÜNFGELENKES	57
4.1	Kraftverteilung in der Roboterstruktur	73
4.2	Vergleich der Trajektorien - FÜNFGELENK	82
4.3	Vergleich der Kräfte in den Armen des Manipulators - FÜNFGELENK	83
4.4	Numerischer Fehler der SCDD Methode	84
4.5	Numerischer Fehler der L-D'A Methode	84
4.6	Kraftellipsen am parallelen Manipulator FÜNFGELENK	88
4.7	Kennfelder der Steifigkeit am parallelen Manipulator FÜNFGELENK	90
4.8	Trägheitsellipsen am parallelen Manipulator FÜNFGELENK	91
4.9	Kennfelder der Trägheit am parallelen Manipulator FÜNFGELENK	92
5.1	Elemente der Systemarchitektur - FÜNFGELENK	96
5.2	Zentrales Modul des Adaptronikknosens	100
5.3	Aktiver Arm des Manipulators FÜNFGELENK	102
5.4	Beschleunigungssensor am Endeffektor des Manipulators FÜNFGELENK	106
5.5	Messprinzip mit einem Piezosensor	108
5.6	Einfluss der Vorspannkraft auf die Krafterzeugung des Piezoaktors	110
6.1	Zeitoptimale ptp-Trajektorie	115
6.2	Einfluss der Bahnplanung und Lageregelung auf die Schwingungsanregung	119
6.3	Arbeitsraumsegmentierung des Manipulators FÜNFGELENK	122
6.4	Reglerkonzept	124
6.5	Effizienz der Regelung: D_2T_2 kontra LQR	130
6.6	Testtrajektorie und Organisation der Regelung	134
6.7	Schwingungsunterdrückung am parallelen Manipulator FÜNFGELENK	135
6.8	Identifikation der Roboterstruktur - FÜNFGELENK	138

6.9	Verschiebung der Eigenfrequenz bei Laständerung - FFT Analyse	140
6.10	Vereinfachtes Ersatzmodell der linken Führungskette	141
6.11	Organisation des kompakten modalen Reglers im s-Bereich	142
6.12	Organisation des kompakten modalen Reglers im z-Bereich	143
6.13	Regelkreis im kontinuierlichen und zeitdiskreten Bereich	144
6.14	Regelung im kontinuierlichen und zeitdiskreten Bereich	145
6.15	Regelung mit dem Piezosensor-Piezoaktor-Paar	146
6.16	Regelung mit dem Beschleunigungssensor-Piezoaktor-Paar	147

Tabellenverzeichnis

4.1	Komplexität der Trägheitsmatrixinvertierung	81
4.2	Reduktion der arithmetischen Operationen	82
4.3	Parameter des FÜNFGELENKES - I	89
4.4	Parameter des FÜNFGELENKES - II	92
5.1	Parameter des aktiven Armes - FÜNFGELENK	102
6.1	Zeitvergleich der Trajektorien	120
6.2	Eigenfrequenzen des Modells und deren Phasenverschiebung	139
6.3	Bestimmung der effektiv schwingenden Masse für die Grundmode	141

Symbolverzeichnis

Allgemeine Abkürzungen

AD-Wandler	Analog-Digital-Wandler
ANSYS	Finite-Elemente-Programm
CFK	Carbonfaser/Kohlenstofffasern verstärkter Kunststoff
CPLD	Steuerungseinheit (engl. Complex Programmable Logic Device)
CPU	Hauptprozessor (engl. Central Processing Unit)
DA-Wandler	Digital-Analog-Wandler
DAB	Datenerfassungskarte (engl. Data Acquisition Board)
DAE	Differential-Algebraische Gleichungen (engl. Diff.-Algebraic Equations)
DD	Direkte Dynamik
DKP	Direktes Kinematisches Problem
DMS	Dehnungsmessstreifen
DSP	Digitaler Signalprozessor
DYMOLA	Mehrkörpersimulationssoftware
FIFO	Speicherungsverfahren (engl. First In – First Out)
Firewire	Kommunikationsstandard (IEEE 1394)
IAP	Kommunikationsprotokoll (engl. Industrial Automation Protocol)
ID	Inverse Dynamik
IKP	Inverses Kinematisches Problem
Mathematica	Programm für symbolische und numerische Berechnungen
Matlab	Matrizen Laboratorium (engl. Matrix Laboratory)
MiRPA-X	Middleware (engl. Middleware for Robotic and Process control Applications - eXtended)
ODE	Gewöhnliche Differentialgleichung (engl. Ordinary Diff. Equation)
PC	Personal Computer
PDE	Partielle Differentialgleichung (engl. Partial Diff. Equation)
PROSA	Softwarearchitektur (engl. Parallel RObots Software Architektur)

PZT	Plumbum-Zirkonat-Titanat: polykristallines Keramikmaterial
SIMPACK	Mehrkörpersimulationssoftware
Simulink	Simulationsumgebung für Matlab
SVP	Steuer-/Versorgungsspannungsplatine
TCP	Kommunikationsprotokoll (engl. Transmission Control Protocol)
QNX	Echtzeitbetriebssystem

Kennzeichnung durch Schreibweise

t	Zeitbereich	f	Frequenz
z	Zeitdiskreter Bereich	s	Frequenzbereich
$a(t)$	Zeitvariable Größe	a	Skalar
\dot{a}	Erste Ableitung nach der Zeit	a'	Erste Ableitung nach dem Ort
\ddot{a}	Zweite Ableitung nach der Zeit	a''	Zweite Ableitung nach dem Ort
\underline{a}	Spaltenvektor	$\underline{\underline{A}}$	Matrix
\underline{a}^T	Zeilenvektor	$\underline{\underline{A}}^T$	Transponierte Matrix
$\underline{0}$	Nullvektor	$\underline{0}$	Nullmatrix
\underline{E}	Einheitsvektor	$\underline{\underline{E}}$	Einheitsmatrix
		$\underline{\underline{A}}^{-1}$	Inverse Matrix
		$\underline{\underline{A}}^+$	Pseudoinverse Matrix
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen	\mathbb{R}^n	n-dimensionaler reeller Raum
$a \in \mathbb{A}$	a ist Element von \mathbb{A}	da	Differential von a
∂a	Partielles Differential von a	δa	Variation von a
C^x	x-mal stetig Differenzierbar	$\ a\ $	Vektorlänge
$\angle a$	Winkel	\mathbb{N}_0	natürliche Zahlen und Null
$A(s)$	Übertragungsfunktion in s	$A(z)$	Übertragungsfunktion in z

Lateinische Formelzeichen

$a(t)$	Verlauf der Beschleunigung über der Zeit (6.2)
a_{max}	maximaler Wert der Beschleunigung (6.2)
$a_{0,1,2}$	Koeffizienten des Zählers der Übertragungsfunktion (6.12)

$a_{i1,\dots,i4}$	Faktoren (2.18)
a_{ij}	Koeffizienten des Elastizitätstensors (2.5)
a_{ij}	Koeffizienten der Gleichung (3.9)
$A_i(x)$	Querschnittfläche
a_x	kartesische Beschleunigung (5.1)
$b_{0,\dots,4}$	Koeffizienten des Nenners der Übertragungsfunktion (6.12)
$b_{i1,i2}$	Faktoren (2.17)
$c_{0i}(\underline{x},t)$	Ortsvektor i im Inertialsystem O_0 (2.8)
$\underline{\underline{C_b}}$	Coriolis- und Zentrifugalkräftenmatrix der Baumstruktur (4.19)
$\underline{\underline{C_{bi}}}$	Coriolis- und Zentrifugalkräftenmatrix der i -ten seriellen Führungskette (4.43)
$\underline{\underline{C_{bin_{bp}}}}$	Coriolis- und Zentrifugalkräftenmatrix der redundanten Freiheitsgrade der i -ten seriellen Führungskette (4.45)
C_c	Sensorkapazität (5.3)
$\underline{c_i}(\underline{x},t)$	Ortsvektor der verformten Lage (2.7)
$\underline{j c_i}(q_{ie})$	Lagevektor (2.60)
$\underline{n_e c_i}(q_{ie})$	Lagevektor (2.63)
$\underline{\underline{C_i}}(\underline{\dot{q}_{ie}}, \underline{q_{ie}})$	Coriolis- und Zentrifugalkräftenmatrix (2.57)
c_{ij}	Konstante (2.19)
c_j	Konstante (2.75)
$c_{j1,j2}$	Konstanten (2.78)
$\underline{c_j}(\underline{x},t)$	Ortsvektor im j -ten Referenzsystem (2.59)
$\underline{\underline{C_k}}$	Coriolis- und Zentrifugalkräftenmatrix des parallelen Manipulators (4.20)
C_r	Rückkopplungskapazität (5.3)
C_t	Kabelkapazität (5.3)
$\underline{\underline{C_x}}$	kartesische Coriolis- und Zentrifugalkräftenmatrix des parallelen Manipulators (4.55)
d_{33}	Piezomodul in Longitudinalrichtung (5.2)
D_0	Lehrsches Dämpfungsmaß (2.72)
d_a	virtueller Dämpfungsfaktor des Aktors (6.8)
d_{ai}	virtueller Dämpfungsfaktor des i -ten modalen Reglers (6.36)
$\underline{\underline{D_b}}$	Dämpfungsmatrix der Baumstruktur (4.19)
$\underline{\underline{D_{bi}}}$	Dämpfungsmatrix der i -ten seriellen Führungskette (4.43)
$\underline{\underline{D_{bin_{bp}}}}$	Dämpfungsmatrix der redundanten Freiheitsgrade der i -ten seriellen Führungskette (4.45)

D_{ei}	Dämpfungsfaktor der i -ten Mode (6.35)
d_f	Dämpfungsfaktor (2.70)
d_f	Dämpfungsfaktor des vereinfachten Modells (6.14)
D_f	Dämpfungsgrad des vereinfachten Modells (6.18)
$d_i(\dot{w}_i)$	modale Dämpfung (2.14)
$\underline{\underline{D_i}}$	Dämpfungsmatrix (2.26)
d_{ij}	modale Dämpfung (2.20)
$\underline{\underline{D_k}}$	Dämpfungsmatrix des parallelen Manipulators (4.20)
d_r	Dämpfungsfaktor des CFK-Rohres (6.5)
$\underline{\underline{D_x}}$	kartesische Dämpfungsmatrix des parallelen Manipulators (4.58)
E	Elastizitätsmodul (2.11)
e_{13}	Regeldifferenz
E_a	elektrische Feldstärke (5.4)
$\underline{\underline{E_H}}$	Elastizitätstensor (2.5)
f_a	durch Piezoaktor erzeugte Kraft (5.5)
f_b	skalare Kräfte der Führungsketten am Endeffektor (4.28)
f_{bi}	skalare Kraft am Ende der i -ten Führungskette (4.29)
f_{bx}	kartesische Kräfte der Führungsketten am Endeffektor (4.30)
f_{bxi}	kartesische Kraft am Ende der i -ten Führungskette (4.29)
\hat{f}_{bxi}	kartesische Zwangsmomente/kräfte am Ende der i -ten Führungskette (4.49)
f_e	externe Kraft am aktiven Arm (6.6)
$f_{ji}(\underline{q_{ae}}, \underline{\ddot{q}_{ae}})$	nichtlineare Funktion der geometrischen Beziehungen der Trägheitsmatrix (4.69)
f_{max}, f_{min}	maximale und minimale Kraft (4.63)
f_{max}, f_{min}	maximale und minimale Eigenfrequenz (6.33)
$\underline{f_n}$	Momente/Kräfte im kartesischen Raum $\underline{f_n} \in \mathbb{R}^n$ (2.69)
f_s	vom Sensor gemessene Kraft (6.7)
f_x	gesamte externe Kraft am aktiven Arm (6.5)
$\underline{f_x}$	externe Kraft am Endeffektor (4.28)
g	Erdschwerebeschleunigung (6.6)
$\underline{\underline{G}}$	Jacobimatrix des parallelen Manipulators (3.38)
$G_a(s)$	Übertragungsfunktion des modalen Reglers (6.9)
$G_{ai}(s)$	Übertragungsfunktion des i -ten modalen Reglers (6.36)
$G_{ei}(s)$	Übertragungsfunktion der i -ten Mode (6.35)
$\underline{\underline{G_q}}$	Jacobimatrix der inversen Kinematik (3.36)

$G_s(s)$	Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises (6.10)
$\underline{G_x}$	Jacobimatrix der direkten Kinematik (3.36)
$\underline{h}(q_b)$	Zwangsbedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten (4.8)
$\underline{h}(x, Q_a)$	vektorielle Funktion des geschlossenen Vektorzuges (3.35)
h_i	Funktion der kinematischen i -ten Zwangsbedingung (4.3)
$H_{ij}(\xi_{ij})$	Hermite-Polynom (2.36)
$h_n(q_{i1}, \dots, q_{ine})$	Funktion der direkten Kinematik (2.66)
$I_i(x)$	Flächenträgheitsmoment (2.11)
$\underline{I_{ij}}$	varianter Trägheitstensor des j -ten Elementes (2.51)
$\underline{J_b}$	Jacobimatrix der Baumstruktur (4.31)
$\underline{J_i}$	Jacobimatrix (2.58)
$\underline{J_{iap}}$	Jacobimatrix der aktiven und passiven Freiheitsgrade der i -ten seriellen Führungskette (4.49)
$\underline{J_{ij}}$	Spaltenvektor der Jacobimatrix (2.58)
$\underline{J_{ijr}}$	rotatorisches Teil der Jacobimatrix (2.50)
$\underline{J_{ir}}$	rotatorisches Teil der Jacobimatrix (2.62)
$\underline{J_{ijt}}$	translatorisches Teil der Jacobimatrix (2.50)
$\underline{J_{in_{bp}}}$	Jacobimatrix der redundanten Freiheitsgrade der i -ten seriellen Führungskette (4.45)
$\underline{J_{it}}$	translatorisches Teil der Jacobimatrix (2.63)
k_a	Steifigkeit des Piezoaktors (5.5)
k_a	virtuelle Steifigkeit des Aktors (6.8)
k_{ai}	virtuelle Steifigkeit des i -ten modalen Reglers (6.36)
$\underline{K_b}$	Steifigkeitsmatrix der Baumstruktur (4.19)
$\underline{K_{bi}}$	Steifigkeitsmatrix der i -ten seriellen Führungskette (4.43)
$\underline{K_{bin_{bp}}}$	Steifigkeitsmatrix der redundanten Freiheitsgrade der i -ten seriellen Führungskette (4.45)
k_{ei}	Steifigkeit der i -ten Mode (6.35)
k_f	konzentrierte Steifigkeit (2.70)
k_f	Steifigkeit des vereinfachten Modells (6.14)
$\underline{K_i}$	Steifigkeitsmatrix (2.24)
k_{ij}	konzentrierte Steifigkeit (2.52)
$\underline{K_{ij}}$	Steifigkeitsmatrix (2.43)
$\underline{K_k}$	Steifigkeitsmatrix des parallelen Manipulators (4.20)
k_{me}	Steifigkeit (6.33)

$k_{m_e+\Delta m}$	Steifigkeit (6.33)
k_r	Steifigkeit des CFK-Rohres (5.6)
k_v	Steifigkeit der Vorspannfeder (5.5)
k_{vs}	Steifigkeit der Vorspannschlaufe (5.6)
$\underline{\underline{K_x}}$	kartesische Steifigkeitsmatrix des parallelen Manipulators (4.57)
k_{xy}^{DIR}	Projektion der Steifigkeitsmatrix in eine gegebene Richtung (4.65)
L_b	Lagrangesche Funktion der Baumstruktur (4.3)
l_d	Abstand zwischen den Antrieben (3.14)
l_i	Länge des i -ten Armes (2.10)
l_{ij}	Länge des j -ten Teilkörpers (2.42)
l_{ij}	Länge des ij -ten Elementes (3.4)
L_i	Lagrangesche Funktion/Lagrangefunktion (2.9)
L_k	Lagrangesche Funktion des parallelen Manipulators (4.15)
l_0	Dicke der Piezoscheibe in neutralem Zustand (5.4)
m	effektiv schwingende Masse (6.5)
m^{eff}	effektiv schwingende Masse (5.1)
m_a	konzentrierte Masse (2.71)
$\underline{\underline{M_b}}$	Trägheitsmatrix der Baumstruktur (4.19)
$\underline{\underline{M_{bi}}}$	Trägheitsmatrix der i -ten seriellen Führungskette (4.43)
$\underline{\underline{M_{bin_{ip}}}}$	Trägheitsmatrix der redundanten Freiheitsgrade der i -ten seriellen Führungskette (4.45)
m_e	effektiv schwingende Masse (6.33)
m_{e1}	effektiv schwingende Masse der Grundmode (6.35)
m_f	Federmasse (2.71)
m_g	gesamte Masse (2.70)
$\underline{\underline{M_i}}$	Massen-/Trägheitsmatrix (2.23)
m_{ij}	Masse des j -ten Elementes (2.51)
$\underline{\underline{M_{ij}}}$	Massen-/Trägheitsmatrix (2.42)
m_{ji}	Massen/Trägheiten der Elemente der Roboterstruktur (4.69)
$\underline{\underline{M_k}}$	Trägheitsmatrix des parallelen Manipulators (4.20)
$\underline{\underline{M_x}}$	kartesische Trägheitsmatrix des parallelen Manipulators (4.54)
m_{xy}^{DIR}	Projektion der Trägheitsmatrix in eine gegebene Richtung (4.68)
n_a	Anzahl der Piezoaktorscheiben (5.4)
n_{ae}	nicht-redundante Freiheitsgrade (4.69)
$\underline{\underline{N_{ij}}}$	Vektor der Ansatzfunktionen (2.36)
n_p	Anzahl der passiven Freiheitsgrade (4.3)

n_s	Anzahl der Piezosensorscheiben (5.2)
$\underline{N_x}$	kartesische Nachgiebigkeitsmatrix (4.61)
O_i	Referenzsystem des i -ten Armes
$\underline{O_{ij}}$	Vektor zwischen den Punkten i und j (3.2)
O_j	Referenzsystem des j -ten Teilkörpers
O_0	Inertialsystem - Basis
p^A	Anfangspunkt der Trajektorie
p^E	Endpunkt der Trajektorie
$\underline{Q}^{DK,IK}$	Konfigurationsvektor im Gelenkraum (3.47)
$\underline{q_a}$	Koordinaten der angetriebenen Gelenke (4.1)
$\underline{Q_a}$	Vektor der Antriebswinkel (3.35)
$\underline{q_{ae}}$	Vektor der nicht-redundanten Koordinaten (4.7)
$\underline{q_b}$	Koordinaten der Baumstruktur (4.1)
$\underline{q_{bi}}$	Koordinaten der i -ten seriellen Führungskette (4.43)
$\underline{q_e}$	Koordinaten der elastischen Freiheitsgrade (4.1)
$\underline{q_{ie}}(t)$	Vektor der elastischen Moden (2.21)
$\underline{q_{ie}}(t)$	Vektor der Knotenkoordinaten (2.47)
$q_{ij}(t)$	j -ter elastischer Mode (2.16)
q_{ij}	Knotenparameter (2.49)
Q_{ij}	Winkel des ij -ten Gelenkes (3.4)
$\underline{q_{ij}}$	Vektor der Knotenkoordinaten (2.35)
$\underline{q_{ije}}$	Vektor der Elementkoordinaten (2.35)
$\underline{q_{ij\lambda}}$	Eigenvektor (2.27)
$\underline{q_p}$	Koordinaten der passiven Freiheitsgrade (4.1)
q_s	erzeugte Ladung des Piezosensors (5.2)
R_b	Rayleighsche Dissipationsfunktion der Baumstruktur (4.3)
R_i	Rayleighsche Dissipationsfunktion (2.55)
R_{ij}	Rayleighsche Dissipationsfunktion (2.53)
${}^j\underline{R_i}(\underline{q_{ie}})$	Rotationsmatrix (2.60)
$\underline{R_k}$	Rayleighsche Dissipationsfunktion des parallelen Manipulators (4.15)
r_{max}	maximaler Ruck der Antriebe (6.4)
$s_{1,2}$	Doppelwurzel des vereinfachten Modells (6.22)
\underline{S}	Matrix der Statik (4.28)
$\underline{s_i}$	Richtungsvektor der Führungskette am Endeffektor (4.28)
t_{fmin}	Zeit der maximalen Federverformung (6.20)

T_i	kinetische Energie (2.10)
T_{ij}	kinetische Energie (2.42)
$\underline{\underline{{}^i T_0}}$	Transformationsmatrix (2.8)
$\underline{\underline{{}^j T_0}}$	Transformationsmatrix (2.65)
$\underline{\underline{{}^j T_i}}$	Transformationsmatrix (2.60)
t_{min}	Zeit der zeitoptimalen Regelung (6.1)
t_r	Zeit der Schwingungsperiode ohne Dämpfung (6.20)
\underline{U}	Transformationsmatrix der Statik (4.30)
U_a	Spannung am Piezoaktor (5.4)
U_s	Messspannung des Piezosensors (5.3)
v_a	Verstärkung des Reglers (6.8)
$\underline{v_a}$	Vektor der modalen Reglerverstärkungen (6.37)
v_{ai}	Verstärkung des i -ten modalen Reglers (6.36)
$\underline{v_e}$	Vektor der Verstärkungen der Moden (6.37)
v_{ei}	Verstärkung der i -ten Mode (6.35)
V_i	potentielle Energie (2.11)
V_{ij}	potentielle Energie (2.43)
$\underline{v_{ijr}}$	rotatorische Geschwindigkeit (2.50)
$\underline{v_{ijt}}$	translatorische Geschwindigkeit (2.50)
v_{max}	maximale Geschwindigkeit
v_r	Kopplungsfaktor des CFK-Rohres (6.5)
v_{reg}	gemeinsamer Verstärkungsfaktor aller Moden des Reglers (6.37)
V_s	Verstärkung des Operationsverstärkers (5.3)
\underline{W}	Transformationsmatrix der Parameterisierung (4.18)
$\underline{w_i(\underline{r})}$	Verschiebungsvektor (2.4)
$\underline{w_i(\underline{x},t)}$	Verschiebungsvektor (2.7)
$\underline{\tilde{w}_i(x)}$	Vektor der Ansatzfunktionen (2.21)
$\tilde{w}_i(x,t)$	Approximation des Verschiebungsvektors (2.21)
$\tilde{w}_{ij}(x)$	Ansatzfunktion (2.21)
$w_{ij}(x)$	Eigenfunktion der Mode (2.16)
$\tilde{w}_{ije}(\xi_{ij},t)$	Deformation des j -ten Elementes (2.36)
W_{ink}	virtuelle Arbeit der nicht-konservativen Kräfte (2.9)
\underline{x}	Ortsvektor der unverformten Referenzlage (2.7)
$\underline{\underline{x}}$	Vektor der Endeffektorlage (3.35)
x_a	Längskoordinate des Aktors (6.5)
x_{ai}	Stellgröße des i -ten modalen Reglers (6.36)

x_i	x -Koordinate des i -ten Punktes (3.4)
x_j	Schwingungskordinate (2.70)
x_{jh}	Hüllkurve (2.77)
\dot{x}_n	Vektor der kartesischen Geschwindigkeiten (2.67)
\ddot{x}_n	Vektor der kartesischen Beschleunigung (2.68)
x_r	Längskoordinate des CFK-Rohres (6.5)
\underline{x}_x	Vektor der kartesischen Koordinaten (4.39)
\underline{x}_{xy}	Richtung der Projektion (6.31)
y_i	y -Koordinate des i -ten Punktes (3.5)
$\underline{\underline{z}}_i^{j-1}$	dritte Spalte der $\underline{\underline{R}}_i^{j-1}(q_{ie})$ Rotationsmatrix (2.61)

Griechische Formelzeichen

α_i	Faktor (2.14)
α_i	i -ter Hilfswinkel (3.17)
β_i	Faktor (2.14)
β_i	i -ter Hilfswinkel (3.19)
β_r	Proportionalitätsfaktor (6.25)
χ	Hilfswinkel zur Begrenzung des Arbeitsraumes (3.45)
δ_f	Abklingkonstante des vereinfachten Modells (6.17)
$\underline{\epsilon}$	Verzerrungsvektor (2.5)
$\underline{\underline{\epsilon}}$	Verzerrungstensor (2.3)
$\epsilon_{xx,yy,zz}$	Dehnungen (2.3)
φ_{ij}	Phasenwinkel der j -ten Mode (2.19)
φ_j	Phasenwinkel (2.75)
γ	Hilfswinkel zur Begrenzung des Arbeitsraumes (3.45)
$\gamma_{xy,xz,yz}$	Scherungen (2.3)
$\underline{\eta}_b(q_b)$	Vektor der Gravitationskräfte/momente der Baumstruktur (4.19)
$\underline{\eta}_{bi}(\underline{q}_{bi})$	Vektor der Gravitationskräfte/momente der i -ten seriellen Führungskette (4.43)
$\underline{\eta}_{bin_{bp}}(\underline{q}_{bi})$	Vektor der Gravitationskräfte/momente der redundanten Freiheitsgrade der i -ten seriellen Führungskette (4.45)
$\underline{\eta}_k(q_b)$	Vektor der Gravitationskräfte/momente des parallelen Manipulators (4.20)
$\underline{\eta}_x$	Vektor der kartesischen Gravitationskräfte/momente des parallelen Manipulators (4.56)

κ_i	Konstante (2.18)
κ	Konditionszahl (4.64)
λ	Proportionalitätsfaktor der Projektion (4.70)
λ_i	i -ter Lagrange-Multiplikator (4.3)
$\underline{\lambda_i}$	Vektor der Eigenwerte (2.30)
λ_{ij}	Eigenwert (2.27)
$\lambda_{ij1,2}$	Wurzeln der Gleichung (2.31)
$\lambda_{max}, \lambda_{min}$	maximaler und minimaler Eigenwert (4.63)
$\mu_i(x)$	Massenbelegung (2.10)
ν	Poissonische Zahl
ρ_i	Massendichte
ρ_{ne}	Faktor (2.62)
$\underline{\sigma}$	Spannungsvektor (2.2)
$\underline{\underline{\sigma}}$	Spannungstensor (2.1)
$\sigma_{xx,yy,zz}$	Normalspannungen (2.1)
$\underline{\tau_a}$	Momente/Kräfte der angetriebenen Gelenke (4.46)
$\underline{\tau_{ae}}$	Momente/Kräfte der nicht-redundanten Freiheitsgrade (4.13)
$\underline{\tau_{ai}}$	Momente/Kräfte der angetriebenen Gelenke der i -ten seriellen Führungskette (4.49)
$\underline{\tau_b}$	Momente/Kräfte der Baumstruktur (4.3)
$\hat{\underline{\tau_b}}$	generalisierte externe Momente/Kräfte (4.4)
$\underline{\tau_{bi}}$	Momente/Kräfte der i -ten seriellen Führungskette (4.43)
$\underline{\tau_{ie}}$	Momente/Kräfte im Gelenkraum $\underline{\tau_{ie}} \in \mathbb{R}^{n_e}$ (2.69)
$\tau_j^{Träg}$	Beitrag der Trägheitsmatrix zu den Momenten/Kräften der Dynamik (4.69)
$\underline{\tau_k}$	Momente/Kräfte des parallelen Manipulators (4.10)
$\underline{\tau_{kae}}$	aus der kartesischen Kraft berechnete Momente/Kräfte der Roboterstruktur (4.33)
$\underline{\tau_p}$	Momente/Kräfte der redundanten Freiheitsgrade (4.13)
$\underline{\tau_{pi}}$	Momente/Kräfte der redundanten Freiheitsgrade der i -ten seriellen Führungskette (4.45)
$\tau_{xy,xz,yz}$	Schubspannungen (2.1)
ω	Kreisfrequenz (6.3)
ω_0	Kennkreisfrequenz (2.72)
ω_f	Kreisfrequenz des vereinfachten Modells (6.16)
ω_{ij}	Eigenkreisfrequenz (2.17)
$\underline{\xi}$	Vektor der numerischen Genauigkeit (3.49)

ξ_{ij}	normierte Koordinate (2.36)
ψ_i	i -ter Hilfswinkel (3.27)

Tiefgestellte Indizes

a	Elemente der aktiven Freiheitsgrade
b	Elemente der Baumstruktur
e	Elemente der elastischen Freiheitsgrade
i	Ordnungszahl des Elementes
j	Ordnungszahl des Elementes
k	Elemente der kompakten Struktur
nk	Elemente der nicht-konservativen Größen
p	Elemente der passiven Freiheitsgrade
q	Elemente im Gelenkraum
x,y,z	Elemente im kartesischen Raum

Kurzfassung

Im Vordergrund der vorliegenden Arbeit steht die Unterdrückung von Schwingungen in der Roboterstruktur eines elastischen parallelen Manipulators. Um dieses Ziel zu realisieren, soll eine Strukturregelung entwickelt werden, die grundsätzlich über die Kenntnis der Bewegungsgleichungen des zu regelnden Manipulators verfügen muss, da diese Art von Maschinen im Allgemeinen zur Klasse der nichtlinearen Systeme gehört. Deswegen müssen, um die gestellte Aufgabe zu erfüllen, grundsätzlich zwei Hauptprobleme gelöst werden:

- Modellierung eines elastischen parallelen Manipulators
- Entwurf einer modellbasierten Regelung

Parallele Manipulatoren werden in der Literatur und in der Praxis vorwiegend als Starrkörpersysteme behandelt. Die für diese Klasse von Robotern entwickelten Methoden können zumeist nicht ohne arbeitsaufwendige Modifikationen auf die elastischen parallelen Manipulatoren übertragen werden. Aus diesem Grund werden im Rahmen dieser Arbeit, basierend auf den am häufigsten eingesetzten und hier beschriebenen Standardmethoden, neue Verfahren und Lösungsansätze entwickelt und vorgestellt. Zu diesen neuen Lösungen gehören

- eine Methode zur Herleitung der direkten Kinematik,
- zwei Methoden zur Bestimmung des Arbeitsraumes,
- eine Methode zur Herleitung der Jacobimatrix,
- eine Methode zur verteilten Berechnung der direkten Dynamik und
- ein modellbasiertes nichtlineares Regelungsverfahren.

Die neuen Konzepte werden auf Basis des ebenen elastischen parallelen Manipulators FÜNFGELENK analysiert und diskutiert. Durch Simulationen und Experimente werden die hier vorgeschlagenen Lösungen anschließend bestätigt. Anhand der gewonnenen Ergebnisse wird das Potential der neuen Verfahren aufgezeigt, wodurch eine gute Basis für ihre aufgabenorientierte roboterbezogene Weiterentwicklung und Optimierung geschaffen wird.

Abstract

The main aim of this study is the damping of vibration within the structure of an elastic parallel robot. In order to achieve this aim, the control of the manipulator's structure needs to be developed. Basically the equations of motion of the elastic manipulator need to be known for the control strategy, as generally this type of machine belongs to non-linear systems. Therefore, in order to complete this task, two main problems need to be solved:

- The modelling of an elastic parallel manipulator
- The design of a model-based control

Parallel manipulators are mainly treated as rigid-body systems both in theory and in practise. Those methods developed for these types of robots mostly cannot be transferred directly to the elastic parallel manipulators. For this reason in the course of this study, based on the most commonly used standard methods as described here, new techniques and approaches are developed and presented. These new techniques include:

- A method for the derivation of direct kinematics
- Two methods to determine a manipulator's workspace
- A method to derive a Jacobian matrix
- A method for the distributed/simultaneous calculation of direct dynamics
- A model-based controller algorithm

These new concepts are analysed and discussed on the basis of a FIVE-BAR planar elastic parallel manipulator. Through simulations and experiments, the solutions suggested here, can subsequently be confirmed. Based on the acquired results, the potential of the new techniques will be shown, whereby a good basis for further task- and manipulator-orientated development and optimisation will be achieved.

1 Einleitung

1.1 Motivation

Ein altes Sprichwort sagt „Zeit ist Geld“. Der Sinn dieses Sprichwortes ist insbesondere in der Industrie klar zu erkennen. Je schneller ein Produkt hergestellt wird, desto mehr kann produziert werden und desto billiger wird die Produktion sein. Natürlich darf dabei die Qualität des Produktes nicht vernachlässigt werden. Nach diesem Motto ist Produktivität einer der wichtigsten Wettbewerbsfaktoren in der Wirtschaft. Dabei soll auch die Flexibilität eines Produktionssystems nicht aus den Augen verloren werden. Damit ist die Zeit gemeint, die für eine Umrüstung der Produktionslinien auf ein neues Produkt benötigt wird. Sie muss minimiert werden, da diese Ausfallzeit mit zusätzlichen Kosten für eine Fabrik verbunden ist. Aus diesen Gründen suchen die Produktionsunternehmen nach Methoden und Lösungen, schnell und kostengünstig hochwertige Produkte herstellen zu können, wodurch die Kosten gesenkt und Profite gesteigert werden.

Die Automatisierung der Produktionsprozesse erlaubt es diesen Anforderungen gerecht zu werden. Eine der wichtigsten Komponenten der Automatisierung sind die Roboter-/ Manipulatoren. Sie werden in einer Produktionslinie vor allem in Handhabung und Montage eingesetzt. Roboter sind im allgemeinen Maschinen, die durch Universalität, hohe erreichbare Geschwindigkeiten und gute Genauigkeit charakterisiert werden können. Die Universalität ermöglicht eine schnelle Anpassung der Maschinen an neue Aufgaben, was die Kosten durch Ausfallzeiten in den Fabriken reduziert. Dank der hohen erreichbaren Geschwindigkeiten verkürzen sich die Arbeitszyklen, wodurch die Produktivität des gesamten Systems gesteigert werden kann. Die geforderte Genauigkeit der Manipulatoren ist dagegen aufgabenspezifisch und kann von mm bis zu μm variieren. Von Vorteil ist es natürlich, wenn diese Genauigkeit möglichst hoch ist, was allerdings hohe Kosten mit sich bringt. Der Kompromiss zwischen Genauigkeit und Geschwindigkeit ist dabei eine der größten Begrenzungen für alle Manipulatoren. Besonders ist das bei Manipulatoren mit einer seriellen kinematischen Kette sichtbar. Um die Geschwindigkeit eines solchen Manipulators zu erhöhen, müssen Antriebe mit höherer Leistung eingesetzt werden. Damit ist ein größeres Gewicht solcher Antriebe verbunden.

Da die Antriebe in seriellen Kinematiken mit dem Roboter mitbewegt werden, müssen die Elemente der Roboterstruktur steifer und damit massiver gebaut werden, um Deformationen der Roboterstruktur und dadurch Einbußen bei der Genauigkeit zu verhindern. Infolge dessen steigt die bewegte Masse. Die zusätzliche Leistung der Antriebe wird im Grunde genommen dabei verbraucht, diese zusätzliche Masse zu bewegen. Aus diesem Grund sind die seriellen Kinematiken in ihren erreichbaren Geschwindigkeiten und Genauigkeiten ziemlich begrenzt.

Eine verlockende Alternative zu den seriellen Kinematiken bilden die Manipulatoren mit parallelen kinematischen Ketten, so genannte Parallelroboter oder parallele Manipulatoren. Sie besitzen geschlossene kinematische Führungsketten, die eine Arbeitsplattform mit einem Greifer oder einem Werkzeug im Raum oder in einer Ebene bewegen. Der große Vorteil dieser Manipulatoren besteht darin, dass ihre Antriebe gestellfest oder zumindest gestellnah montiert werden können. Das führt zu einer großen Reduzierung der bewegten Robotermaße, da die Elemente der Struktur, wie Arme und Gelenke, nicht mehr an das Gewicht der schweren Antriebe angepasst werden müssen. Der Manipulator kann dadurch bei gleich leistungsstarken Antrieben höhere Beschleunigungen und Geschwindigkeiten erreichen. Das Verhältnis der zu handhabenden Masse zur Eigenmasse der beweglichen Roboterstruktur steigt bis auf 1:1, was bei seriellen Kinematiken zur Zeit unerreichbar ist und durchschnittlich bei einem Verhältnis 1:7 liegt. Die gesamte Masse des Parallelroboters kann aber trotzdem im Vergleich zu einer seriellen Kinematik größer sein. Das Robotergestell muss massiv und steif gebaut sein, um eine Verformung und Schwingung, unter dem Einfluss der hohen Beschleunigungen und Geschwindigkeiten der beweglichen Struktur, zu vermeiden. Sonst würden diese Effekte zu einer Beeinträchtigung der Robotergerauigkeit und einer Verlängerung der Zykluszeiten führen. Die Genauigkeit der parallelen Manipulatoren resultiert vor allem aus ihrer Bauart. Da die Antriebe nicht mehr seriell verbunden sind, addieren sich ihre Positionierungsfehler nicht mehr, was die Genauigkeit deutlich erhöht. Diese Art von Manipulatoren ist deswegen insbesondere für die Elektronikindustrie geeignet. Diese Industriebranche, welche ein großes Marktpotenzial für die Robotik repräsentiert, stellt besonders hohe Anforderungen an die Geschwindigkeit und Genauigkeit der eingesetzten Maschinen. Wegen des Integrationsgrades der heutigen Elektronik werden für Roboter zumeist Genauigkeiten im μm -Bereich verlangt. Die Parallelroboter können, aus oben genannten Gründen, diese Anforderungen leichter als die seriellen Kinematiken erfüllen.

Das Streben nach der Erhöhung der erreichbaren Beschleunigungen und Geschwindigkeiten führt in die Versuchung die Masse der Roboterstruktur weiter zu reduzieren. Dies kann unter anderem durch den Einsatz leichter Materialien, wie z.B. Kohlenstofffaserverbundwerkstoff (CFK) erreicht werden, wodurch bei gleicher Geometrie das Gewicht der Elemente

niedriger wird. Um jedoch die dynamische Leistung des Manipulators weiter erhöhen zu können, muss die Masse der Struktur weiter reduziert werden. Diese Reduzierung bleibt aber nicht unbestraft. Die Steifigkeit der Elemente wird vermindert, was zwei Effekte zur Folge hat. Der erste Effekt ist die statische Deformation der Roboterelemente unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes durch das Eigengewicht und die zu handhabende Masse. Im stationären Zustand, in dem der Roboter seine Aufgabe ausführen soll, beeinträchtigt das seine Positionierungsgenauigkeit. Diese Deformation kann aus dem dynamischen Modell des Roboters errechnet und anschließend kompensiert werden. Der zweite Effekt sind Strukturschwingungen, die während der Roboterbewegung und am Ende der Trajektorie entstehen können. Diese Oszillationen des Roboterendeffektors verlängern den Arbeitszyklus, da zuerst der Endeffektor zum Stillstand kommen muss, bevor die Aufgabe ausgeführt werden darf. Dies führt unausweichlich dazu, dass die bei der Reduzierung der Masse gewonnene Zeit durch entstandene Schwingungen verloren geht. Es müssen deswegen Maßnahmen ergriffen werden, die zur Schwingungsunterdrückung in der Roboterstruktur führen, um die durch Leichtbau gewonnene Leistung des damit elastischen parallelen Manipulators zur Wirkung zu bringen.

1.2 Stand der Technik

Gegen Ende der vierziger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts wurden die ersten, sowohl seriellen als auch parallelen Manipulatoren konzipiert und gebaut [84, 121]. Die seriellen Manipulatoren haben sich sehr schnell durchgesetzt. Die Hauptvorteile dieser Kinematiken waren unter anderem der große Arbeitsraum, einfaches Erreichen einer Orientierung des Endeffektors und die einfache Steuerung der Maschine. Diese Eigenschaften führten zu einem breiten Einsatz der seriellen Manipulatoren in der Industrie, vor allem als Teil der Automatisierung von Produktionslinien. Der breite Einsatz bildete wiederum eine Basis für die Forschung und Weiterentwicklung dieser Kinematiken. Die parallelen Manipulatoren dagegen fanden erst in den sechziger Jahren ihren Einsatz in der Luft- und Raumfahrt, beim Bau der Flugsimulatoren zur Schulung von Piloten [136]. Viele Jahre war das fast ihr einziges Einsatzgebiet, was leider keine große Anregung für die Forschung im Bereich dieser Mechanismen ergab. Diese Situation hat sich erst Ende der neunziger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts geändert, als die Anforderungen an die Roboter bezüglich Geschwindigkeiten und Genauigkeiten gestiegen sind. Die seriellen Kinematiken erreichten in manchen Bereichen ihre technologischen Leistungsgrenzen, wie zum Beispiel bei hochpräziser Montage in der Elektronikindustrie, so dass nach Alternativen gesucht werden musste. Dank ihrer Bauweise kamen die parallelen Kinematiken in Betracht [68, 73, 74, 142]. Die reduzierte Masse der bewegten Roboterstruktur

ermöglichte es mit diesen Maschinen höhere Beschleunigungen und Geschwindigkeiten zu erreichen. Die Genauigkeit der Positionierung war dank der parallelen Anordnung der Antriebe ebenfalls erhöht. Diese positiven Eigenschaften gaben den Impuls zu einer Intensivierung der Untersuchungen und Entwicklungen im Bereich dieser Manipulatoren. Im Rahmen dieser Forschungsarbeiten wurden unter anderem Methoden zu einer Vergrößerung des Arbeitsraumes entwickelt, wodurch diese anfängliche Begrenzung teilweise außer Kraft gesetzt wurde [17, 18, 44]. Das ermöglichte den Einsatz dieser Roboterart in Gebieten, die früher den seriellen Robotern vorbehalten waren.

1.2.1 Modellierung

Die Parallelroboter weisen, trotz der geringeren Masse der beweglichen Roboterstruktur, im Vergleich zu den seriellen Kinematiken eine höhere Steifigkeit auf. Diese Eigenschaft eröffnet den Weg zu einer weiteren Massenreduktion im Bereich der Struktur. Die Reduktion der Masse resultiert aus einem Optimierungsprozess, einer Anpassung der Steifigkeit der einzelnen Elemente an die maximalen auftretenden Kräfte und Momente, so dass sie als starr angesehen werden können [67, 68]. Aus diesem Grund werden die Parallelroboter überwiegend als Starrkörpermechanismen behandelt, was sich in den entwickelten und in der Literatur präsentierten Methoden widerspiegelt.

Die seriellen und parallelen Roboter gehören im Allgemeinen zur Klasse der nichtlinearen Systeme. Das Verhalten solcher Systeme als Funktion der Zeit wird durch die Gleichungen der Dynamik beschrieben - nichtlineare Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung [10, 49, 89, 121, 136]. Die Kenntnis dieser Bewegungsgleichungen wird sowohl bei Simulationen, als auch bei Steuerung und Regelung benötigt. Zur Herleitung dieser Gleichungen müssen aber zuerst die kinematischen Abhängigkeiten in der Roboterstruktur in analytischer Form beschrieben werden [9, 84, 121]. Die Beschreibung der Kinematik und der Dynamik muss dabei alle relevanten Eigenschaften eines Manipulators berücksichtigen, damit eine gute Übereinstimmung des Modells mit der realen analysierten Maschine im Rahmen einer gewünschten Genauigkeit erreicht wird. Die Erfüllung dieser Voraussetzung ist von großer Bedeutung, sowohl für die Optimierung der Roboterleistung in der Konzeptionsphase, als auch für eine wirkungsvolle Steuerung und Regelung im Betrieb. Zur Herleitung der Modelle der Dynamik können verschiedene Prinzipien und Methoden aus der analytischen Mechanik benutzt werden [48, 117, 121, 136]. Eine der Methoden, die sich bei der Aufstellung der Modelle der Roboterdynamik durchgesetzt und bewährt hat, ist die *Lagrange Methode*. Sie ermöglicht es auf elegante und effiziente Art und Weise eine Energiefunktion - *Lagrangesche*

Funktion des gesamten Manipulators zu formulieren. Aus dieser Energiefunktion kann die Dynamikgleichung des modellierten Manipulators gewonnen werden. Zu diesem Zweck werden die *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen erster oder zweiter Art* verwendet. Die Gleichungen erster Art verlangen bestimmte Annahmen bei der Modellierung, um die *Lagrangeschen Multiplikatoren* einzuführen, wodurch die Erstellung der Bewegungsgleichungen erschwert werden kann [26, 86, 136]. Mit dieser Methode wurden bereits ebene elastische parallele Manipulatoren modelliert [50, 140]. Die *Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art* brauchen keine Multiplikatoren, müssen aber mit zusätzlichen Gleichungen ergänzt werden, welche die Schließbedingungen der parallelen Kinematik berücksichtigen [137, 138, 139]. Die ersten Pionierarbeiten mit dieser Methode wurden im Bereich der Getriebelehre in den zwanziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts durchgeführt [12]. Eine Erweiterung dieser Methode, die *Lagrange-D'Alembert Formulierung*, erlaubt das Integrieren der Schließbedingungen der parallelen Kinematiken in die Bewegungsgleichungen mit Hilfe einer parametrisierten Jacobimatrix [91, 92, 96, 148]. Auf diese Weise bekommen die Gleichungen eine kompakte Form, ohne einen zusätzlichen Gleichungssatz. Diese Vorgehensweise hat sich bei den Starrkörperrobotermodellen als sehr praktisch erwiesen. Sie hat einen gravierenden Vorteil gegenüber anderen Methoden. Die Modellierung wird hier auf zwei Schritte aufgeteilt. Im ersten Schritt werden die Führungsketten der parallelen Struktur getrennt und als einzelne serielle kinematische Ketten modelliert, was bei den symmetrischen Strukturen den Arbeitsaufwand reduziert. Im zweiten Schritt wird durch die Parametrisierung der Gleichungen der einzelnen kinematischen Ketten das kompakte Modell des gesamten parallelen Manipulators erstellt. Die Möglichkeit, die Gleichungen der Dynamik für jede kinematische Kette getrennt herleiten zu können, ermöglicht es die Verfahren zur Herleitung aus der seriellen Robotik zu übernehmen. Vor allem trifft das auf die Verfahren zur Modellierung der elastischen seriellen Manipulatoren zu. Da im Bereich der seriellen Robotik in der Vergangenheit intensiver und umfangreicher geforscht wurde, sind viele Methoden und Verfahren für die Modellierung solcher Manipulatoren bereits entwickelt und untersucht [10, 11, 53, 105, 117]. Die kompakte Darstellung der Dynamikgleichungen in dieser Methode kann, trotz aller Vorteile bei der Analyse, auch gewisse Probleme bei der Berechnung mit sich bringen. Die Dimensionen der kompakten Matrizen der elastischen parallelen Roboter können eine Berechnung von modellbasierten Steuerungs-/Regelungsalgorithmen in Echtzeit erschweren oder sogar verhindern. Die Problematik der Dimensionsreduktion wurde bisher nur begrenzt in der Literatur behandelt [112, 137, 138]. Eine Ergänzung der oben vorgestellten Methoden der Dynamikmodellierung sind die numerischen Programme zur Simulation von Mehrkörpersystemen, wie z.B. SIMPACK, DYMOLA [77, 111, 129, 130]. Sie ermöglichen unter anderem eine Verifikation der analytisch hergeleiteten Modelle mit Hilfe von numerischen Berechnungsmodellen. Dieser Vergleich eröffnet eine zusätzliche Möglichkeit, die Fehler bei den analytischen Verfahren zu

entdecken und im Falle neuer Methoden, sie zu überprüfen. Beim Einsatz in der Entwicklung von Steuerung und Regelung haben sich diese Programme nur als begrenzt nützlich erwiesen [118].

1.2.2 Regelung

Die verminderte Steifigkeit des leicht gebauten parallelen Manipulators führt in der Roboterstruktur zu Deformationen und Schwingungen während der Bewegung. Diese unerwünschten Effekte müssen kompensiert oder beseitigt werden, um die gewonnene Leistung des Manipulators nutzen zu können. Die Deformation kann relativ einfach mit Hilfe der Messungen aus dem Modell der Dynamik berechnet und durch die Robotersteuerung kompensiert werden [42, 105]. Die Dämpfung der Schwingungen in der Roboterstruktur, in einem nichtlinearen System, stellt dagegen ein komplexeres Problem dar. Die Lösungsansätze können hier in zwei Gruppen aufgeteilt werden. In der ersten Gruppe befinden sich die Methoden, welche die Entstehung der Schwingungen minimieren, so dass die vorhandenen Vibrationen vernachlässigt werden können. Zu diesen Methoden gehören unter anderem, die glatte-/stetige Bahnplanung, bei deren Einsatz die elastischen Moden nur geringfügig angeregt werden oder eine aktive Steifigkeitsregelung, die am Beispiel der Antriebsredundanz bei einem ebenen Parallelroboter gezeigt wurde [40, 42, 56, 57]. In der zweiten Gruppe befinden sich die Methoden, welche die entstandenen Schwingungen unterdrücken sollen. Hier kann zwischen passiven und aktiven Methoden unterschieden werden. Die passive Schwingungsunterdrückung kann zum Beispiel mit Stoffen erreicht werden, die einen hohen Dämpfungskoeffizienten aufweisen [27, 81]. In der Praxis bedeutet das die Integration entsprechender Materialien in die Roboterstruktur schon während der Produktionsphase eines Manipulators. Bei den aktiven Methoden werden dagegen Aktoren eingesetzt, welche die entstandenen Schwingungen dämpfen sollen. Die direkte Nutzung der Antriebe, die jeder Roboter besitzt und welche die Bewegung der Roboterstruktur bewerkstelligen, bietet sich geradezu an. Im Gegensatz zu der Regelung des Starrkörperroboters ist das jedoch mit zusätzlichen Problemen verbunden. Die elastischen Manipulatoren besitzen mehr Ausgänge als Eingänge, d.h. die Anzahl der Steuereingänge ist kleiner als die Anzahl der Regelgrößen. Die Abbildung zwischen den Eingängen und Ausgängen, in diesem Fall dem Endeffektor und den elastischen Moden, weist deswegen eine instabile Null-Dynamik auf. In linearen Systemen würde das einem nichtminimalphasigen System entsprechen [78]. Das Problem der Null-Dynamik ist bei der Anwendung der exakten Linearisierung besonders klar zu erkennen. Diese Methode wird ohne Komplikationen bei starren Robotern eingesetzt. Bei den elastischen Manipulatoren verlangt sie aber eine Redefinition des Ausganges, was am Beispiel serieller Manipulatoren gezeigt wurde [88, 147]. Diese

Redefinition kann durch den Einsatz des inversen Dynamikmodells vermieden werden [25]. Die Anwendung anderer, auf der Nutzung der Antriebe basierender Methoden zur Schwingungsunterdrückung bei seriellen elastischen Manipulatoren, wie z.B. neuronale Netze oder Trägheitsmomentregelung wurde ausführlich in der Literatur behandelt [33, 87, 105, 133].

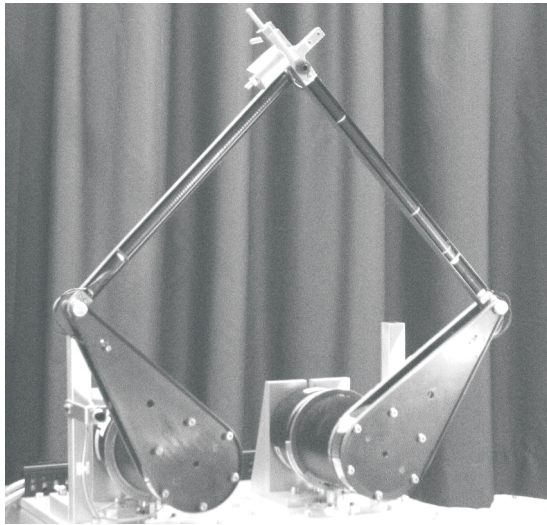
Die Singular-Perturbation-Methode erlaubt die Betrachtung des Problems aus einer anderen Perspektive [75]. Im Lichte dieser Theorie ist es möglich, ein Modell des elastischen Manipulators in zwei Teilsysteme mit unterschiedlichen Zeitmaßstäben aufzuteilen. Der Reglerentwurf für beide Teilsysteme, Starrkörper und elastische Struktur, kann dadurch getrennt durchgeführt werden. Diese Vorgehensweise wurde bereits auf Basis der seriellen elastischen Manipulatoren bestätigt [42, 119]. Die Teilung des Roboters in zwei Teilsysteme eröffnet einen Weg für die Anwendung neuer zusätzlicher Aktoren. Die Anwendung neuer Aktoren resultiert jedoch nicht nur aus der Möglichkeit der getrennten Regelung, sondern auch aus den Eigenschaften der Roboterantriebe. Ihre Dynamik erlaubt einen effektiven Einsatz nur im unteren Frequenzbereich, bis ca. 100 Hz. Die Platzierung der Antriebe ist durch die Konstruktion des Roboters festgelegt und kann nicht an die elastische Struktur angepasst werden. Die Antriebe sind nicht immer direkt an die elastischen Elemente des Roboters angeschlossen, wie im Falle der seriellen Roboter. Dadurch ist die Kraftübertragung und damit auch die Regelung erschwert. Die durch Antriebe erzeugten Kräfte sind proportional zu dem reduzierten Gewicht der Struktur und werden dementsprechend kleiner, was den Einfluss der Antriebe auf die elastischen Moden unausweichlich verringert. Diese Probleme rechtfertigen den Einsatz von zusätzlichen Aktoren zum Zwecke der Strukturregelung. Als solche zusätzlichen Aktoren bieten sich die Piezoaktoren an. Sie können in unterschiedlichen Bauformen gefertigt werden, wie z.B. Piezostapel oder Piezostreifen [144]. Das ermöglicht ihre Platzierung schon während der Herstellungsphase an fast beliebiger Stelle der elastischen Roboterstruktur, so dass der Einfluss der Regelung auf die einzelnen Moden optimiert werden kann [30, 31, 107]. Die auf dem Piezoeffekt basierenden Elemente wurden deshalb in den letzten Jahren intensiv erforscht und weiterentwickelt [143]. Sie sind in der Literatur unter dem Begriff „intelligente Materialien“ oder „intelligente Strukturen“ bekannt und bilden zusammen mit den Regelungsstrategien ein Gebiet unter dem Namen - Adaptronik. Die Adaptronik wird bereits in mehreren Bereichen zur Schwingungsunterdrückung eingesetzt, wie z.B. Platten, Maschinen, Fahr- oder Flugzeugen [16, 71, 82, 90, 93]. Die positiven Eigenschaften der Piezoaktoren führten auch zu ihrer Anwendung in der Robotik. Die separate Beeinflussung der elastischen Struktur mit Hilfe von flächigen Piezomodulen und der Roboterbewegung mit den konventionellen Antrieben wurde auf den seriellen elastischen Kinematiken untersucht [42]. Es wurde gezeigt, dass die Regelungsalgorithmen für die Roboterbewegung und Strukturregelung beliebig kombiniert und unabhängig voneinander dimensioniert werden können.

Die Untersuchungen konnten eine hohe Regelqualität und Anwendbarkeit der Adaptronik bestätigen [145]. Die ersten Untersuchungen zu den separaten Regelungsstrategien wurden bereits auf den elastischen parallelen Robotern durchgeführt. Zu diesem Zweck wurden sowohl Piezostreifen, als auch Piezostapel verwendet [4, 5, 15, 108, 118, 139, 140]. Die Wirkung der Adaptronik wurde in diesem Bereich ebenfalls nachgewiesen. Die Regelungskonzepte für die elastischen parallelen Manipulatoren wurden dabei nicht so intensiv untersucht und entwickelt, wie das im Bereich der seriellen Robotik geschehen ist. Der Stand der Forschung auf diesem Gebiet stellt somit eine der Motivationen für die vorliegende Arbeit dar.

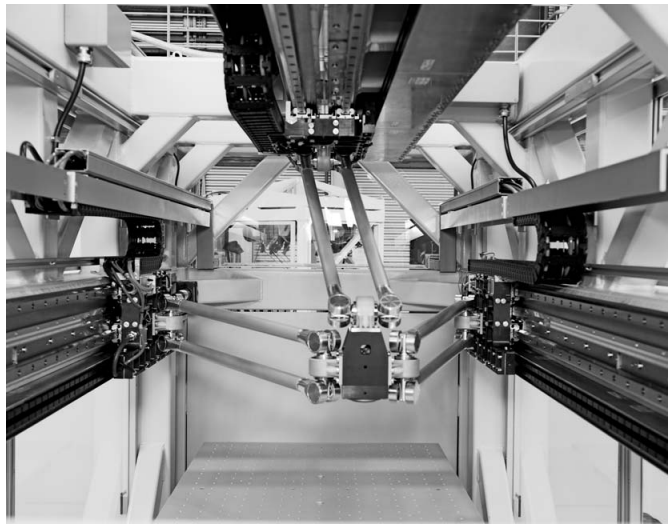
1.3 Sonderforschungsbereich - SFB 562

Im Jahre 2000 wurde der Sonderforschungsbereich - SFB 562 „Robotersysteme für Handhabung und Montage“ an der Technischen Universität Braunschweig in Zusammenarbeit mit dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Braunschweig ins Leben gerufen. In das Projekt wurden Institute aus den Bereichen, Mechanik, Elektrotechnik und Informatik einbezogen. Die Motivation dieser Initiative war die interdisziplinäre systematische Grundlagenforschung und Entwicklung paralleler Kinematiken mit dem Kerneinsatzbereich in der zeitoptimalen Handhabung und Montage. Die gestellte Aufgabe verlangte eine komplexe Betrachtung und Analyse des gesamten robotischen Systems. Im Rahmen der Analyse der Roboterkonstruktion wurden Untersuchungen durchgeführt, die den optimalen Entwurf paralleler Strukturen zum Ziel hatten [28, 45, 68]. Dazu gehörte ebenfalls der Entwurf neuer Elemente, welche an die spezifischen Anforderungen der Parallelrobotik angepasst werden sollten [67, 95]. Der optimale Entwurf führte zu einer Massenreduktion der Roboterstruktur, um die ausführbaren Beschleunigungen und Geschwindigkeiten des Manipulators zu erhöhen und damit die Zykluszeiten zu verkürzen. Das erhöhte aber gleichzeitig die Schwingungsanfälligkeit der Roboterstruktur, wodurch der Einsatz der Adaptronik zur Schwingungsunterdrückung nötig wurde. [15, 108, 111]. Die Modellierung der Dynamik der elastischen parallelen Manipulatoren unterstützte den optimalen Entwurf der Roboterstruktur [111, 123, 124] und bildete gleichzeitig die Grundlage für die Entwicklung einer geeigneten Steuerung [63, 80, 100] und Regelung [2, 16, 116, 125, 126]. Eine Zusammenarbeit aller Komponenten des robotischen Systems wurde durch die Kommunikation und passende Systemarchitektur gewährleistet [59, 61]. Zum Zweck der praktischen Untersuchungen und Erprobungen der entwickelten Konzepte wurden anschließend parallele Manipulatoren gebaut. Die wichtigsten Versuchsträger des SFB's sind in Bild 1.1 dargestellt.

Die Parallelroboter FÜNFGELENK, in Bild 1.1(a), und TRIGLIDE, in Bild 1.1(b), wurden als



(a) FÜNFGELENK



(b) TRIGLIDE



(c) HEXA



(d) PARMA

Bild 1.1: Parallele Manipulatoren des Sonderforschungsbereiches - SFB 562

elastische Roboter gebaut, um ihre Leistungsparameter zu erhöhen. Aus diesem Grund wurden sie mit adaptronischen Komponenten, wie Piezoaktoren, Piezosensoren und Beschleunigungssensoren ausgestattet. Mit diesen Komponenten sollen die auf Grund des reduzierten Gewichtes entstandenen Vibrationen erfasst und mit Hilfe der Strukturregelung unterdrückt werden. Der Roboter FÜNFGELENK, gebaut aus dem Kohlenstofffaserverbundwerkstoff (CFK), stellt dabei einen Ausgangspunkt für die in dieser Arbeit entwickelten Konzepte dar. Dieser Manipulator besitzt zwei Freiheitsgrade und kann sich nur in der xy -Ebene bewegen. Auf Grund des Versatzes zwischen den beiden kinematischen Führungsketten und der Anwesenheit von passiven Gelenken in der Roboterstruktur sind jedoch Schwingungen in der z -Richtung möglich, was aber eher als parasitärer Effekt und nicht als Eigenschaft des Manipulators betrachtet wird. Der Roboter HEXA, siehe Bild 1.1(c), bildete eine Plattform, zur Untersuchung der Kraftregelung und der Handhabungsmöglichkeiten der parallelen Kinematiken, welche bekanntlich den seriellen Kinematiken in dieser Hinsicht unterlegen sind.

Dieser Manipulator verfügt über sechs Freiheitsgrade. Die Antriebsredundanz und aktive Steifigkeitsregelung eines Parallelroboters wurde auf dem Versuchsträger PARMA in Bild 1.1(d) implementiert und untersucht [56].

1.4 Gliederung der Arbeit

Der Umfang und die Struktur der vorliegenden Arbeit resultieren aus dem vorgestellten Stand der Forschung, wonach die parallelen Manipulatoren überwiegend als Starrkörperroboter behandelt werden. Konsequenz dieser Annahme ist die Situation, dass man bei den meisten Methoden zur Modellierung und Analyse auf die Einführung von Elastizitäten verzichtet hat. Die Berücksichtigung der verminderten Steifigkeit würde aber in vielen Fällen einen erhöhten Rechenaufwand zur Folge haben. Das kann bei hochdynamischen Systemen nicht akzeptiert werden. Deswegen fordert diese Situation die Entwicklung neuer Verfahren, welche die elastische Struktur des parallelen Manipulators von Anfang an berücksichtigen. Im Rahmen dieser Arbeit wurden solche Verfahren in den Bereichen der Kinematik, Dynamik und Regelung entwickelt. Die präsentierten Konzepte wurden am Beispiel eines ebenen elastischen parallelen Manipulators - FÜNFGELENK vorgestellt und diskutiert.

Die Arbeit beginnt mit der Modellierung eines elastischen balken-ähnlichen Armes. Das Modell wird in Form einer partiellen Differentialgleichung und in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen, einer Näherung des kontinuierlichen Modells nach dem *Ritz-Verfahren*, angegeben. Da die beiden Verfahren nur zur Modellierung einfacher geometrischer Primitive geeignet sind, werden die *Finite-Elemente-Methode* und Methode der konzentrierten Parameter vorgestellt und besprochen. Diese beiden Methoden können zur Beschreibung komplexerer Systeme benutzt werden. Anschließend wird die Herleitung des gesamten Modells für eine serielle elastische kinematische Kette vorgestellt. Eine kurze Analyse des Schwingungsverhaltens einer Mode ergänzt diese Diskussion.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Kinematik eines elastischen parallelen Manipulators und der Bestimmung seines Arbeitsraumes. Zwei Standardmethoden zur Beschreibung der Kinematik werden präsentiert und diskutiert. Die Analyse sowohl dieser beiden als auch in der Literatur vorgestellter Verfahren führte zu der Entwicklung einer neuen trigonometrischen Methode, welche ebenfalls vorgestellt wird. Anschließend werden zwei neue Verfahren besprochen, welche die Bestimmung des Arbeitsraumes unterstützen, was sowohl für die Analyse, als auch für die Sicherheit des Manipulators von großer Bedeutung ist.

Die Dynamik eines elastischen parallelen Manipulators wird im vierten Kapitel diskutiert. Diese Diskussion konzentriert sich auf die Aufstellung und die effiziente Berechnung der Bewegungsgleichungen. Die Aufstellung dieser Gleichungen verlangt, im Gegensatz zu den seriellen Robotern, die Berücksichtigung der Zwangsbedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten. Es wird gezeigt, wie dieses Problem nach den zwei Standardverfahren - den *Lagrangeschen Gleichungen erster Art* und dem *Lagrange-D'Alembert Formalismus* - gelöst wurde. Ergänzend dazu wird eine neue Methode zur Herleitung der Jacobimatrix eines elastischen parallelen Manipulators beschrieben. Die effiziente Berechnung der Bewegungsgleichungen dagegen stellt vor allem bei der Berechnung der direkten Dynamik von komplexen Systemen höherer Ordnung, zu denen ebenfalls die elastischen parallelen Manipulatoren gehören, ein Problem dar. Als Lösung wurde, basierend auf den vorgestellten Standardverfahren, eine Methode entwickelt, die eine verteilte, parallele Berechnung der Gleichungen der direkten Dynamik solcher Roboter ermöglicht. Anschließend werden die Eigenschaften der Roboterstruktur besprochen, die hinsichtlich der Schwingungsunterdrückung relevant sind.

Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit den Komponenten der Strukturregelung. Die im Sonderforschungsbereich 562 entwickelte, modular aufgebaute Systemarchitektur wird dargestellt und besprochen. Sowohl der entworfene, selbst aufgebaute Adaptronikknoten als auch die gewählten Sensoren und Aktoren werden hinsichtlich der Nutzung bei der Schwingungsunterdrückung präsentiert und diskutiert.

Die Strukturregelung eines elastischen Manipulators wird im sechsten Kapitel behandelt. Zuerst werden der Einfluss der Bahnplanung auf die Entstehung der Schwingungen in der Roboterstruktur und die Verbindung der Bahnplanung mit der Strukturregelung zum Zweck der zeitoptimalen Regelung analysiert. Die Diskussion der Strukturregelung eines elastischen parallelen Manipulators beginnt mit der Vorstellung eines bekannten Konzeptes zur linearen Regelung einer nichtlinearen Strecke mit Hilfe der Methode der linearen Kennfeldregler. Im Gegensatz zu dieser Methode wird eine neue robuste nichtlineare strukturorientierte modellbasierte Regelung vorgeschlagen. In diesem neuen Regelungskonzept wird ein linearer Regler vorgestellt, der ein federähnliches Verhalten des Aktors bewirkt. Eine Methode zur Dimensionierung dieses Reglers und ein Algorithmus zur Anpassung der Reglerparameter an das nichtlineare System werden vorgeschlagen. Die Stabilität und Robustheit der Regelung werden nachgewiesen. Anschließend wird das neue Konzept in Simulationen und Experimenten untersucht und bestätigt.

Die Zusammenfassung der Arbeit ist Gegenstand des letzten Kapitels.

2 Elastizität und Schwingungen in der Roboterstruktur

2.1 Quellen von Schwingungen in der Roboterstruktur

Ein Parallelroboter ist grundsätzlich aus zwei Hauptkomponenten aufgebaut. Einer beweglichen Roboterstruktur und einem stabilen Gestell, an dem die Antriebe montiert sind. Das Gestell ist in der Regel massiv gebaut, um die großen Kräften, die durch die hochdynamische Bewegung der Struktur hervorgerufen werden, aufzunehmen. Aus diesem Grund kann das Gestell als starre Konstruktion betrachtet werden und ist damit als Quelle von Schwingungen vernachlässigbar. Den Übergang zwischen dem Gestell und der beweglichen Struktur bilden die Antriebe. Bei den parallelen Manipulatoren werden meistens Direktantriebe eingesetzt, unter anderem auf Grund der kleinen Massen der Roboterstruktur und der hohen Anforderungen an die Dynamik (hohe Beschleunigungen und Geschwindigkeiten). Die Anwendung von Getrieben erübrigt sich und damit auch eine potentielle Quelle von Schwingungen und Hysterese [58]. Die bewegliche Struktur setzt sich aus Gelenken und balken-ähnlichen Armen zusammen. Im Gegensatz zu den seriellen werden in parallelen Kinematiken passive Gelenke benutzt. Die passiven Gelenke haben keinen Antrieb und dienen der Übertragung von Kräften, Momenten und der Bewegung. Abhängig von ihrer Steifigkeit und Konstruktion können sie eine Ursache für Schwingungen sein. Diese Elemente sind in letzter Zeit ein Gegenstand intensiver Forschungsarbeiten, mit dem Ziel der Optimierung und Anpassung an die spezifischen Anforderungen der hochdynamischen parallelen Manipulatoren [95]. So wurden bereits adaptronische Gelenke entwickelt, die eine aktive Regelung der Gelenksteifigkeit und der Reibung erlauben [97]. Aus diesen Gründen wurden diese Elemente hier nicht weiter analysiert. Ihr Einfluss auf die Schwingungen wurde jedoch als potentieller parasitärer Effekt berücksichtigt. Das letzte Hauptelement der Struktur, die Arme des Roboters, muss zwei Anforderungen erfüllen: Sie müssen lang genug sein, um den gewünschten Arbeitsraum zu gewährleisten und gleichzeitig muss die Masse dieser balken-ähnlichen Arme möglichst gering sein [18, 67]. Diese zwei Anforderungen führen zu einer Steifigkeitsminderung bei die-

sen Elementen. Aus diesem Grund werden die Arme des Roboters, welche die Geometrie der beweglichen Struktur bestimmen, als elastisch angenommen und als Quelle für Schwingungen betrachtet. Auf Basis dieser Elemente werden die Phänomene der Elastizität und der Schwingung vorgestellt und besprochen.

2.2 Elastizitätstheorie

2.2.1 Spannungszustand und Deformation

Jedes Material weist eine Elastizität auf und unterliegt bei externer Beanspruchung einer Deformation. Abhängig von der Größe dieser Beanspruchung, der Reaktion des Materials und den Anforderungen an die Genauigkeit, wird so ein Körper als starr oder elastisch angesehen. Ein Körper kann in einem industriellen Umfeld vier Arten von Beanspruchungen ausgesetzt sein [24]:

- Zug/Druck
- Schub bzw. Scherung
- Biegung
- Torsion (Verdrillung)

Der hydrostatische Druck, als fünfte Grundbeanspruchungsart wird hier nicht berücksichtigt. Diese Beanspruchungen können einzeln oder in beliebiger Kombination auftreten. Ihre Einwirkung auf einen Körper induziert innere Kräfte, welche in jedem Punkt des Körpers durch einen Spannungszustand beschrieben werden können. Dieser Zustand ist im Allgemeinen orts- und richtungsabhängig. Verhält sich dabei ein Material in allen Punkten gleich, so wird es als *homogen* und sonst als *inhomogen* bezeichnet. Wenn die Materialeigenschaften richtungsabhängig sind, wird es als *anisotrop* und anderenfalls als *isotrop* benannt. An dieser Stelle wird angenommen, dass die hier besprochenen Materialien das linear-elastische Stoffgesetz erfüllen, und sich die Deformationen auf infinitesimale Verzerrungen beschränken. Der Spannungszustand kann in jedem Punkt eines solchen Körpers eindeutig durch einen Spannungstensor festgelegt werden, dessen Komponenten in drei senkrecht aufeinander stehenden Schnittflächen dargestellt werden können [39, 114, 117]. Bild 2.1(a) zeigt diese neun Komponenten bei einem infinitesimalen Quader. Die normal zu einer Schnittfläche stehenden Komponenten heißen Normalspannungen und die Komponenten, die in dieser Fläche senkrecht zueinander liegen, werden als Schubspannungen bezeichnet. Der Spannungszustand

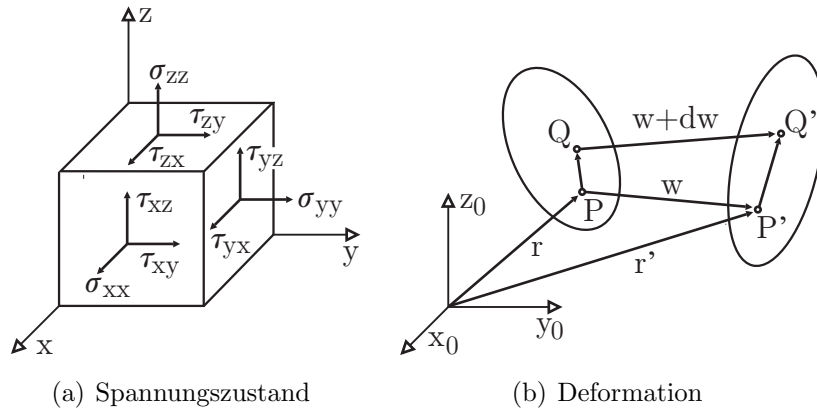


Bild 2.1: Spannungszustand und Deformation eines elastischen Körpers

kann mit einem Spannungstensor 2. Stufe, dem sogenannten *Cauchyschen Spannungstensor*, ausgedrückt werden

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Die Schubspannungen sind nicht voneinander unabhängig sondern werden durch ein Momentengleichgewicht miteinander verbunden, was einen symmetrischen Spannungstensor ergibt. Daraus resultieren die Relationen: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ und $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Die sechs Größen können weiter zu einem Spannungsvektor zusammengefasst werden

$$\underline{\underline{\sigma}}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Ein Spannungszustand führt zu einer Verzerrung des Körpers, gezeigt in Bild 2.1(b). Dabei bezeichnet der Vektor $\underline{w} = \underline{w}(\underline{r})$ die Deformation des Körpers unter dem Einfluss äußerer Kräfte. Auf Grund der Deformation ändert sich die Entfernung zwischen zwei Punkten in dem Körper von $||PQ||$ auf $||P'Q'||$. Diese Änderung, der Verzerrungszustand, kann durch einen infinitesimalen Verzerrungstensor 2. Stufe, ähnlich wie beim Spannungszustand, beschrieben werden

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

wobei $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ und $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ sind. Die Elemente der Hauptdiagonale werden als Dehnungen und die übrigen als Scherungen bezeichnet. Die Eigenschaften des Spannungs-

tensors können sinngemäß auf den Verzerrungstensor übertragen werden. Die Symmetrie resultiert in diesem Fall aus den Verträglichkeitsbedingungen. Die Komponenten des Tensors können ebenfalls in einer Vektorform dargestellt werden. Seine Elemente werden experimentell aus den mit gemessenen Verschiebungen \underline{w} berechneten Verschiebungsgradienten ermittelt:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial w_x}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} = \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}, \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial w_y}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}, \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w_z}{\partial z}, & \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen (Dehnungen und Scherungen) und den Verschiebungen im Körper eindeutig bestimmt.

2.2.2 Hookesches Gesetz

Die Spannungen sind mit den Verzerrungen durch das linear-elastische Stoffgesetz verbunden [24, 39]. Es wird dabei angenommen, dass die Deformationsgeschichte und die Zeit keinen Einfluss haben. Zusätzlich wird noch die Annahme getroffen, dass sich die Stoffe in einer Umgebung mit konstanter Temperatur befinden z.B. eine klimatisierte Fabrikhalle, so dass dieser Einfluss nicht berücksichtigt werden muss. Die lineare Beziehung zwischen den zwei besprochenen Tensoren, bekannt als *Hookesches Gesetz*, kann mit einem Tensor der 4. Stufe beschrieben

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{E_H}} \cdot \underline{\epsilon}\tag{2.5}$$

und in Matrixform dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} \end{bmatrix}.\tag{2.6}$$

Der Elastizitätstensor $\underline{E}_H \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ besitzt im allgemeinen Fall eines *anisotropen* Materials 36 Komponenten, welche sich wegen der Symmetrie des Tensors auf 21 Elemente reduzieren. Ohne die Symmetrie der beiden Spannungs- und Verzerrungstensoren wäre der Elastizitätstensor mit 81 Komponenten besetzt. Die Menge der unabhängigen Komponenten kann bei bestimmten Stoffen weiter reduziert werden. Bei den faserverstärkten Kunststoffen oder Materialien mit ähnlicher Struktur, welche orthogonal anisotropes Verhalten - *Orthotropie* - aufweisen, kann die Anzahl der nötigen Komponenten auf 9 gesenkt werden. *Orthotropie* zeichnet sich durch drei senkrecht aufeinander stehende Vorzugsrichtungen aus. Die gleiche Reduktion auf 9 Komponenten kann bei den *isotropen* Stoffen erreicht werden. In diesem Fall sind aber zur Herleitung aller neun Komponenten nur zwei Konstanten nötig, der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν (*Poissonsche Zahl*).

Aus technischer Sicht ist es bei der Konstruktion neuer Maschinen von Vorteil ihre Elemente, falls sie sich auf Grund der Massenoptimierung als elastisch ergeben, aus *homogenen*, *isotropen* oder *orthotropen* Stoffen zu fertigen. Das vereinfacht die Modellierung solcher elastischer komplexer Systeme und reduziert den Rechenaufwand bei der Steuerung und Regelung.

2.3 Modellierung eines elastischen Roboterarmes

Wie schon in Abschnitt 2.1 erwähnt, sollen die Arme des Parallelroboters lang und „schlank“ entworfen werden, um einerseits einen möglichst großen Arbeitsraum des Manipulators zu gewährleisten und andererseits die Masse der Struktur zu reduzieren. Diese Anforderungen führen dazu, dass die Roboterarme eine potenzielle Quelle für Schwingungen darstellen. Sie werden oft aus einfachen geometrischen Gebilden, wie z.B. Rohren oder Balken, gefertigt, was ihre Modellierung vereinfacht. So wird während der Konstruktionsphase auch danach gestrebt, die unausweichlichen Deformationen der Arme in einer Vorzugsrichtung zu erlauben, wodurch die Beschreibung der entstandenen Deformationen weiter vereinfacht werden kann. Bei der Annahme eines linearen Stoffgesetzes und kleiner Verformungen, was die Linearität der entsprechenden Gleichung impliziert, kann die Analyse komplexer Fälle auf die Analyse einfacher ein- oder zweidimensionalen Elemente zurückgeführt werden. Das dynamische Verhalten solcher Elemente wird durch lineare partielle Differentialgleichungen (PDE) oder einen Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODE) beschrieben. Die Gesamtlösung für das komplexe System wird durch die Superposition der einzelnen Lösungen gewonnen [114]. Aus diesen Gründen wird die Problematik der Modellierung eines elastischen Roboterarmes am Beispiel einer eindimensionalen Biegedeformation eines homogenen balken-ähnlichen Roboterarmes besprochen. Diese Art der Deformation erlaubt, im Vergleich zu Longitudinaldefor-

mationen, verschiedene Aspekte der Schwingungen anschaulicher darzustellen. Die Begriffe, wie Arm und Balken, werden hier als Synonyme benutzt.

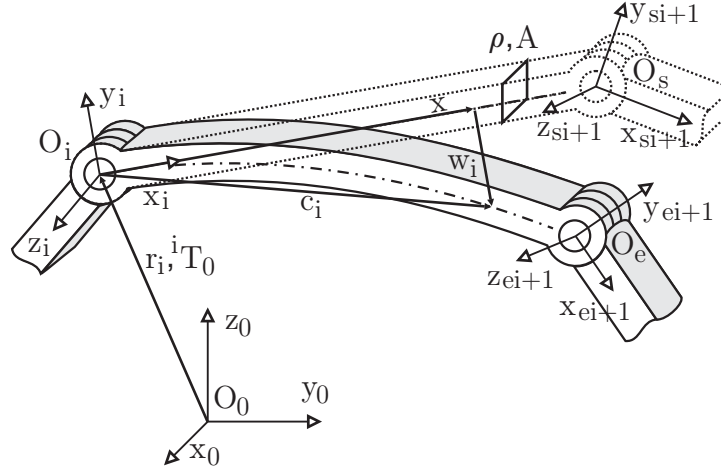


Bild 2.2: Deformation eines Roboterarmes

In Bild 2.2 ist solch ein balken-ähnlicher Arm eines Manipulators in einer Führungskette dargestellt. Diese Anordnung findet sich auch in der Konstruktion des ebenen elastischen Parallelroboters FÜNFGELENK wieder, gezeigt in Bild 1.1(a). Der dargestellte Roboterarm unterliegt auf Grund seiner verminderten Steifigkeit einer Deformation. So unterscheidet sich die tatsächliche Position (Orientierung und Lage) des nächsten Gelenkes in der kinematischen Kette O_e , von der zu erwartenden Position im undeformierten Zustand O_s . Die Geometrie der Struktur ist verändert, was bei der Trajektorieausführung und vor allem im statischen Zustand berücksichtigt werden muss. In einem statischen Zustand beeinträchtigt diese Deformation die Positioniergenauigkeit des Manipulators. Es muss eine quasi-statische Deformationskompensation durchgeführt werden, um die gewünschte Wiederholgenauigkeit zu gewährleisten [42, 56]. In einem dynamischen Zustand dagegen treten je nach Art der Anregung Schwingungen auf, welche den Arbeitszyklus des Roboters verlängern. Das Ziel dieser Arbeit ist, genau diese Zeit zu minimieren, was sich auch in der Wahl des Modellierungsansatzes widerspiegeln wird.

Die Bewegung eines elastischen Körpers wird in einem Inertialsystem O_0 durch die Starrkörperbewegung seines Referenzsystems O_i und den Deformationszustand bezüglich dieses Systems beschrieben. Die Deformation des Armes wird im elementgebundenen Referenzsystem O_i durch einen Vektor $\underline{c}_i(\underline{x}, t)$ definiert

$$\underline{c}_i(\underline{x}, t) = \underline{x} + \underline{w}_i(\underline{x}, t), \quad (2.7)$$

wobei \underline{x} den Ortsvektor der unverformten Referenzlage und $\underline{w}_i(\underline{x}, t)$ den Verschiebungsvektor im Referenzsystem bezeichnen. Die Orientierung der Koordinatensysteme wurde nach der Notation von *Denavit-Hartenberg* gewählt, so dass die x_i -Achse des O_i -ten Referenzsystems zur neutralen Achse des undeformierten Roboterarmes parallel liegt und die z_i -Achse, die Drehachse des Gelenkes darstellt [121]. Die Position im globalen Inertialsystem O_0 kann dann mit Hilfe der homogenen Transformation

$$\underline{c}_{0i}(\underline{x}, t) = {}^i\underline{T}_0 \cdot \underline{c}_i(\underline{x}, t) \quad (2.8)$$

berechnet werden. Die homogene Transformationmatrix ${}^i\underline{T}_0$ beschreibt dabei die Orientierung und die Lage des Referenzsystems O_i im Inertialsystems O_0 . Der Verschiebungsvektor $\underline{w}_i(\underline{x}, t)$ des elastischen Körpers stellt die Lösung der Differentialgleichung dar, welche die Bewegung und die Deformation des elastischen Körpers beschreibt. Die Suche nach der Lösung kann im lokalen Referenzsystem O_i erfolgen, was keine Begrenzung der Allgemeinheit darstellt, da die Bewegungsgleichungen der einzelnen Teile des Manipulators durch entsprechende kinematische Beziehungen in einer globalen Bewegungsgleichung zusammengefasst werden können [11, 121].

2.3.1 Kontinuierliches Modell - Partielle Differenzialgleichung

Das kontinuierliche Modell des elastischen Körpers kann nur für einfache geometrische Primitive erstellt werden. Diese Art der Beschreibung ist aber nicht rein akademischer Natur. Sie liefert eine sehr gute Abbildung der Realität und stellt somit den Ausgangspunkt für die in der Praxis verwendeten, allgemeinen diskreten Modellierungsverfahren dar. Bevor jedoch diese Bewegungsgleichungen hergeleitet werden, müssen gewisse Annahmen bezüglich des Körperverhaltens getroffen werden. Im allgemeinen Fall einer Biegedeformation ist der Balken schubelastisch. Die in Bild 2.2 dargestellte Querschnittsfläche A kann sich ändern und das Element weist eine Drehträgheit auf. Diese Annahmen führen zu den exakten Bewegungsgleichungen eines elastischen Balkens nach der *Timoshenkoschen* Balkentheorie. Die zwei resultierenden Differentialgleichungen benötigen zwei unabhängigen Größen, um die Bewegung eines Balkens zu beschreiben, was deren Lösung kompliziert. Bei Körpern, bei denen das Verhältnis der Höhe zur Länge mehr als 1 : 10 beträgt, was bei Parallelrobotern meistens der Fall ist, kann die Drehträgheit des Balkens vernachlässigt und der Ausschnitt als schubstarr angenommen werden. Die Querschnittsfläche A ist dabei immer senkrecht zur neutralen Achse des Balkens, so dass nur ein Parameter, der Verschiebungsvektor \underline{w}_i , zur Beschreibung der Dynamik notwendig ist. Diese Annahmen führen zu den vereinfachten

Bewegungsgleichungen nach der *Euler-Bernoullischen* Balkentheorie. Diese Vereinfachungen können Fehler in der Lösung der partiellen Differentialgleichung verursachen, welche jedoch in der Praxis für die unteren Moden vernachlässigt werden können [39].

Basierend auf diesen Annahmen kann nun die Bewegungsgleichung für das kontinuierliche System hergeleitet werden [81]. Zu diesem Zweck wurde das *Hamiltonsche Integralprinzip* gewählt, eine auf der Betrachtung der Energie basierende Variationsmethode [48, 94, 99]. Sie stellt eine Äquivalenz zum *d'Alembertschen Prinzip* der virtuellen Arbeiten dar. Aus dieser Methode können ebenfalls die *Lagrangeschen Gleichungen* hergeleitet werden, welche standardmäßig zur Erstellung der Dynamikmodelle von Robotern eingesetzt werden [7, 121, 136]. Im allgemeinen Fall eines nicht-konservativen Systems nimmt das *Hamiltonsche Integralprinzip* die Form

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L_i dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} W_{ink} dt = 0 \quad (2.9)$$

an, wobei L_i die *Lagrangefunktion* und W_{ink} die virtuelle Arbeit der nicht-konservativen Kräfte, wie z.B. Antriebskräfte der Maschine, bezeichnen. Die *Lagrangefunktion* repräsentiert die Differenz aus der kinetischen und der potentiellen Energie des Systems $L_i = T_i - V_i$. Die kinetische Energie resultiert aus der Massenträgheit des elastischen Armes

$$T_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \mu_i(x) \dot{w}_i^2(x, t) dx, \quad (2.10)$$

wobei $\mu_i(x) = \rho_i \cdot A_i(x)$ die Massenbelegung, ρ_i die Massendichte, l_i die Länge des i -ten Armes und \underline{w}_i den Verschiebungsvektor bedeuten. Die Vektoren \underline{w}_i und \underline{x} können in diesem eindimensionalen Fall als Skalare behandelt werden und werden weiter als solche Größen geschrieben. Die Beschränkung der Analyse auf den eindimensionalen Fall stellt dabei keine Begrenzung der Allgemeinheit dar. Der Punkt bei der w_i -Deformation bezeichnet die Ableitung nach der Zeit t . Die potentielle Energie setzt sich aus der Formänderungsenergie und der potentiellen Energie im konservativen Gravitationsfeld zusammen. Die Gravitationskomponente wird an dieser Stelle der Übersichtlichkeit halber vernachlässigt, so dass nur die Formänderungsenergie

$$V_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} EI_i(x) w_i''^2(x, t) dx \quad (2.11)$$

betrachtet wird, wobei $EI_i(x)$ die Biegesteifigkeit und $I_i(x)$ das Flächenträgheitsmoment bezeichnen. Bei der Annahme einer konstanten Querschnittsfläche kann die Biegesteifigkeit als konstant angenommen werden $EI = konst.$ Die zweifache Ableitung, mit zwei Strichen ge-

kennzeichnet, wird nach der Ortskoordinate x durchgeführt. Die virtuellen Arbeiten W_{ink} der nicht-konservativen Kräfte, wie der Antriebskraft und der externen Kräfte, werden zunächst vernachlässigt, was zu einer homogenen Gleichung führt. Die dissipative Energie infolge der Dämpfung wird erst nach der Herleitung der Gleichung für ein rein konservatives System einbezogen. Die Durchführung der δ -Variation der Gleichung (2.9) mit einmaliger partieller Integration der kinetischen Energie T_i nach t , sowie zweifacher partieller Integration der potentiellen Energie V_i nach x unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Variationen δw_i zu festen Zeiten t_1 und t_2 verschwinden, führt zu der folgenden Formulierung

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^{l_i} [\mu_i \ddot{w}_i + (EI_i w_i'')'] \delta w_i dx - (EI_i w_i'')' \delta w_i \Big|_0^{l_i} + EI_i w_i'' \delta w_i' \Big|_0^{l_i} \right\} dt = 0. \quad (2.12)$$

Die geschweiften Klammern verschwinden, da die Zeitpunkte t_1 und t_2 beliebig sind. δw_i ist bis auf die Randwerte willkürlich, so dass nach der Schlußweise der Variationsrechnung die eckigen Klammern und die Summe der Randwerte jeweils für sich verschwinden. Die Summe der an den Rändern geleisteten Arbeit muss verschwinden, was impliziert, dass die beiden letzten Terme der Gleichung (2.12) einzeln für sich oder als Summe ebenfalls verschwinden [81]. Als Endergebnis dieser Herleitung ergibt sich eine partielle Differentialgleichung der 4. Ordnung

$$\mu_i \ddot{w}_i(x,t) + [EI_i w_i(x,t)']'' = 0, \quad (2.13)$$

deren Lösung der gesuchten Deformation $w_i(x,t)$ entspricht. In einem realen System ist jedoch stets Dämpfung vorhanden, so dass sie auch in der Bewegungsgleichung eingeführt wird. Es wird dabei eine geschwindigkeitsproportionale modale Dämpfung angenommen, bei der die Schwingungsmoden des ungedämpften Systems erhalten bleiben. Sie kann nach einem Ansatz von *Rayleigh*, der so genannten Bequemlichkeitshypothese, berechnet werden

$$d_i(\dot{w}_i) = \alpha_i \mu_i \dot{w}_i(x,t) + \beta_i EI_i \dot{w}_i'''(x,t). \quad (2.14)$$

Die Faktoren α_i und β_i sind mittels Experiment zu bestimmen. Der Term bei α_i stellt eine verteilte äußere Dämpfung und der Term bei β_i eine innere Materialdämpfung dar. Die Eigenschaft der modalen Dämpfung erlaubt die Entkopplung der einzelnen Moden [81]. Abschließend führt die Ergänzung der Gleichung (2.13) um die Dämpfung nach (2.14) zu der Beschreibung von freien gedämpften Schwingungen

$$\mu_i \ddot{w}_i(x,t) + EI_i w_i(x,t)'''' + \alpha_i \mu_i \dot{w}_i(x,t) + \beta_i EI_i \dot{w}_i'''(x,t) = 0. \quad (2.15)$$

Exakte Lösung der partiellen Differentialgleichung

Die homogene partielle Differentialgleichung (2.13) beschreibt freie harmonische Schwingungen eines Kontinuums [81]. Zur Lösung dieser Gleichung wird der *Separationsansatz nach Bernoulli* gewählt

$$w_i(x,t) = w_{ij}(x) \cdot q_{ij}(t). \quad (2.16)$$

Die Lösung dieses Problems erfordert neben der Bewegungsgleichung die Kenntnis von Anfangs- und Randbedingungen, was in der Literatur als Anfangs-Randwertproblem bezeichnet wird [39]. Durch Einsetzen von (2.16) in (2.13) und Trennen der Funktionen wird die Gleichung (2.13) in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zerlegt, die entweder von der Zeit oder vom Ort abhängig sind [81]. Die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Gleichung lautet

$$q_{ij}(t) = b_{i1} \cos \omega_{ij}t + b_{i2} \sin \omega_{ij}t, \quad (2.17)$$

wobei ω_{ij} die Eigenkreisfrequenz bezeichnet und aus dem ortsabhängigen Teil der Gleichung bestimmt wird. Die zwei Faktoren b_{i1}, b_{i2} können aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden, welche die Auslenkung und Geschwindigkeit des Balkens im Initialzustand beschreiben. Die ortsabhängige Gleichung dient der Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen ω_{ij} der jeweiligen Moden und deren Eigenfunktionen $w_{ij}(x)$. Als Ansatzfunktionen für die Lösung sollen orthogonale Funktionen gewählt werden, was die vollständige oder begrenzte Entkopplung der einzelnen Moden ermöglichen wird. Die Lösung setzt sich dann aus Kreis- und Hyperbelfunktionen zusammen

$$w_{ij}(x) = a_{i1} \sin \kappa_i x + a_{i2} \cos \kappa_i x + a_{i3} \sinh \kappa_i x + a_{i4} \cosh \kappa_i x. \quad (2.18)$$

Die vier Linearfaktoren a_{i1}, \dots, a_{i4} sind aus den Randbedingungen zu ermitteln. Die Konstante κ_i geht aus der Gleichung (2.13) nach der Separation hervor. Die Randbedingungen beinhalten die Informationen über die Deformations- bzw. die Kraftgrößen an den Rändern des Elementes. Die Lösung des dadurch entstandenen, homogenen Gleichungssystems führt zu einer transzendenten charakteristischen Frequenzgleichung, die unendlich viele Lösungen liefert. Daraus werden die Eigenkreisfrequenzen ω_{ij} der einzelnen Moden und die dazu gehörenden Eigenfunktion $w_{ij}(x)$ ermittelt. Abhängig von den Randbedingungen ergeben sich unterschiedliche Arten der geometrischen Verformung des balken-ähnlichen Armes.

In Bild 2.3 werden die ersten vier Eigenformen für eine „gelenkig-gelenkig“ Befestigung des



Bild 2.3: Eigenformen für eine „gelenkig-gelenkig“ Randbedingung

Armes gezeigt, einer der Standardfälle in der Schwingungslehre [24]. Die Anzahl der Knotenpunkte nimmt dabei mit steigender Ordnung der Moden zu. Diese Art der Befestigung tritt teilweise zwischen zwei passiven Gelenken in der Führungskette eines parallelen Manipulators auf. Die Kenntnis dieser Formen ist bei der Platzierung der Sensoren und Aktoren von größter Bedeutung. Im Fall der angesprochenen Randbedingungen, würde eine Platzierung der Sensoren oder Aktoren an der Oberfläche der Mitte des Armes zu einer guten Erfassung und einer guten Beeinflussung der ungeraden Moden dieser Biegeschwingung führen (die Moden mit gerader Zahl der Knotenpunkten). Die geraden Moden würden aber unbeobachtet bleiben und könnten nicht beeinflusst werden. Ein anderes Problem entsteht bei der Bestimmung der Randbedingungen für die Lösung der Gleichung, wenn sich so ein elastisches Element in der Struktur eines parallelen elastischen Manipulators befindet. Dieses Problem wurde bereits bei den seriellen elastischen Manipulatoren angesprochen [42]. Die Randbedingungen für solche Fälle resultieren im Allgemeinen aus den Randbedingungen der Standardfälle, für die bereits analytische Lösungen existieren [39]. Die gesamte Lösung würde sich dann als Superposition von Lösungen der Standardfälle ergeben [55, 114]. Bei dieser Betrachtung taucht auch die Frage auf, ob statt der Identifikation des gesamten Manipulators eines nichtlinearen Systems, nicht auch die Identifikation seiner einzelnen Teile, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden, erfolgen könnte, was eigentlich eine interessante Alternative wäre. Die Komplikationen, die bei so einer Vorgehensweise entstehen würden, wären z.B. die Berücksichtigung der Reibungseffekte in den passiven Gelenken oder die Gewährleistung gleicher Randbedingungen im Prüfstand, sowie in der Roboterstruktur. Aus diesem Grund erscheint diese Vorgehensweise als ungeeignet.

Nach dieser Analyse und Diskussion kann nun die allgemeine analytische Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.13) als unendliche Reihe angegeben werden

$$w_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij}(x) \cdot q_{ij}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} c_{ij} \cos(\omega_{ij}t - \varphi_{ij}), \quad (2.19)$$

wobei c_{ij} eine Konstante ist und φ_{ij} den Phasenwinkel der j -ten Mode bezeichnet. Diese Größen sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen. Mit der Berücksichtigung der Dämpfung, welche die besprochenen Bedingungen der modalen Dämpfung (2.14) und zusätzlich

die Bedingung $0 < d_{ij} < 1$ erfüllt, kann die Lösung für die freien gedämpften Schwingungen (2.15) angegeben werden

$$w_i(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij}(x) \cdot q_{ij}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} c_{ij} e^{-d_{ij} \omega_{ij} t} \cos(\sqrt{1 - d_{ij}^2} \omega_{ij} t - \varphi_{ij}). \quad (2.20)$$

Die Lösung in dieser Form ist bei der Analyse der Schwingungen von Vorteil. Sie kann als Referenz für die Näherungslösungen dienen und gibt Auskunft über alle im System auftretenden Frequenzen, was z.B. bei der Vermeidung von Resonanzen besonders bei den höheren Moden genutzt werden kann.

2.3.2 Diskretes Modell - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Näherungslösung: Das Ritz-Verfahren

Die analytischen Lösungen (2.19) und (2.20) der partiellen Differentialgleichungen (2.13) und (2.15) sind für die Erstellung der Bewegungsgleichungen von Manipulatoren ungeeignet. In der Praxis sind nur die untersten Moden einer Schwingung von Interesse, da sie, von der begrenzten Bandbreite der digitalen Steuergeräte abgesehen, die meiste Energie übertragen und den größten Beitrag zur Deformation des Elementes leisten [42, 81, 90]. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die Moden hoher Ordnung zu vernachlässigen und damit das kontinuierliche Modell in ein diskretes Modell zu überführen. Dadurch wird auch die mathematische Handhabung eines solchen Systems vereinfacht. Die Überführung des kontinuierlichen Modells in ein diskretes stellt mathematisch gesehen, eine Suche nach einer Näherungslösung der partiellen Differentialgleichung dar. Dabei wird die partielle Differentialgleichung (PDE) durch einen Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODE) approximiert, die dann entweder analytisch oder numerisch gelöst werden können. Zur Diskretisierung eines kontinuierlichen Modells können aus der Mechanik bekannte Verfahren, wie z.B. das *Ritz-* oder das *Galerkin-Verfahren* eingesetzt werden. Basierend auf dem *Ritz-Verfahren*, welches die am häufigsten eingesetzte Methode ist, wird das Prinzip der Diskretisierung des kontinuierlichen Systems erläutert [81, 99].

Da nur eine endliche Anzahl der Moden von Interesse ist, wird eine endliche Reihe als angenäherte Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.13) gesucht. Es wird ein gemischter *n*-gliedriger *Ritz-Ansatz* der Form

$$\tilde{w}_i(x, t) = \sum_{j=1}^n \tilde{w}_{ij}(x) \cdot q_{ij}(t) = \underline{\tilde{w}}_i^T(x) \cdot \underline{q}_{ie}(t) \quad (2.21)$$

gewählt. Die Ansatzfunktionen im Vektor $\underline{\tilde{w}}_i(x) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ genügen den geometrischen oder wesentlichen Randbedingungen. Als solche Funktionen können die Eigenfunktionen der Moden, *Hermite-Polynome* oder *Spline-Funktionen* eingesetzt werden [39, 42, 81]. Der Vektor $\underline{q}_{ie}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ repräsentiert den Vektor der elastischen Moden, die auch als verallgemeinerte Koordinaten bezeichnet werden können. Sie bilden eine minimale Menge der Koordinaten, die zur vollständigen Beschreibung eines Systems nötig sind. Um die Bewegungsgleichung herzuleiten, wird die vorgeschlagene Näherungslösung (2.21) in den Energieausdruck (2.9) des *Hamiltonschen Integralprinzips* eingesetzt. Der Fehler einer solchen Näherung ist minimal, wenn die Variation des so gebildeten Funktional verschwindet. Das ist dann gegeben, wenn die zugehörigen *Eulerschen Differentialgleichungen* der Variationsrechnung erfüllt sind:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{\underline{q}}_{ie}} \right) - \frac{\partial T_i}{\partial \underline{q}_{ie}} + \frac{\partial V_i}{\partial \underline{q}_{ie}} = \underline{0}. \quad (2.22)$$

Sie stellen die *Lagrangeschen Gleichungen 2. Art* dar. Zur Bestimmung der Funktionen $\underline{q}_{ie}(t)$ muss nun ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen (2.22) gelöst werden. Durch das Einsetzen der Näherungslösung in die Energieausdrücke werden die kinetische und potenzielle Energie berechnet. Die kinetische Energie nimmt für die diskreten Moden die Form

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \mu_i(x) \dot{w}_i^2(x,t) dx \approx \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \mu_i(x) \dot{\tilde{w}}_i^2(x,t) dx \\ &= \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_{ie}^T(t) \left[\int_0^{l_i} \mu_i(x) \underline{\tilde{w}}_i(x) \underline{\tilde{w}}_i^T(x) dx \right] \underline{q}_{ie}(t) = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_{ie}^T(t) \underline{\underline{M}}_i \dot{\underline{q}}_{ie}(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

an, wobei $\underline{\underline{M}}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische positiv definite Massen- oder Trägheitsmatrix bezeichnet. Die potenzielle Energie kann auf ähnliche Weise

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{1}{2} \int_0^{l_i} EI_i(x) w_i''^2(x,t) dx \approx \frac{1}{2} \int_0^{l_i} EI_i(x) \tilde{w}_i''^2(x,t) dx \\ &= \frac{1}{2} \underline{q}_{ie}^T(t) \left[\int_0^{l_i} EI_i(x) \underline{\tilde{w}}_i''(x) \underline{\tilde{w}}_i''^T(x) dx \right] \underline{q}_{ie}(t) = \frac{1}{2} \underline{q}_{ie}^T(t) \underline{\underline{K}}_i \underline{q}_{ie}(t), \end{aligned} \quad (2.24)$$

mit einer symmetrischen positiv definiten oder positiv semidefiniten Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ermittelt werden. Das Einsetzen der beiden Energieausdrücke in die Gleichung (2.22) und deren Lösung führt zu der Matrixform

$$\underline{\underline{M}}_i \ddot{\underline{q}}_{ie}(t) + \underline{\underline{K}}_i \underline{q}_{ie}(t) = \underline{0}. \quad (2.25)$$

Diese Gleichung beschreibt näherungsweise freie Schwingungen der ersten n Moden eines

elastischen balken-ähnlichen Armes eines Manipulators. Sie kann mit Hilfe der Bequemlichkeitshypothese $\underline{\underline{D}}_i = \alpha_i \underline{\underline{M}}_i + \beta_i \underline{\underline{K}}_i$, gemäß der Formulierung (2.14), um die Dämpfungsanteile ergänzt werden

$$\underline{\underline{M}}_i \ddot{\underline{q}}_{ie}(t) + \underline{\underline{D}}_i \dot{\underline{q}}_{ie}(t) + \underline{\underline{K}}_i \underline{q}_{ie}(t) = \underline{0}. \quad (2.26)$$

Diese Form der Gleichung entsteht ebenfalls nach der Einführung einer dissipativen Energiefunktion in die Gleichung (2.22) und deren partieller Ableitung nach $\dot{\underline{q}}_{ie}$. Die beiden Dynamikgleichungen (2.25) und (2.26) können mit Hilfe einer Modaltransformation der Koordinaten oder durch eine geeignete Wahl der Koordinaten in eine Diagonalform gebracht werden [27, 42, 81]. Eine Modalmatrix für eine Modaltransformation wird aus den reellen Eigenvektoren des ungedämpften Systems gebildet. Alle Moden sind dadurch entkoppelt und können als einzelne Feder-Masse-Dämpfer-Systeme behandelt werden.

Die beiden Gleichungen (2.25) und (2.26) können sowohl analytisch als auch numerisch gelöst werden. Die numerische Lösung wird bei simulativen Untersuchungen und z.B. bei der Berechnung von Modellen in einer Steuerung oder Regelung eines Manipulators verwendet. Die analytische Lösung ist hingegen bei der Analyse der Systemeigenschaften und der Stabilitätsanalyse von Regleralgorithmen von Interesse. Sie liefert Informationen über die Parameter, die das dynamische Verhalten des Systems determinieren. Um die analytische Lösung zu erhalten, wird eine allgemeine Lösung für die freien ungedämpften Schwingungen (2.25) in bekannter Form

$$\underline{q}_{ie}(t) = \underline{q}_{ij\lambda} \cdot e^{\lambda_{ij}t} \quad (2.27)$$

vorgeschlagen. Diese Form impliziert die Annahme, dass der zeitliche Verlauf für alle Koordinaten in gleicher Weise erfolgt. Der Faktor λ_{ij} repräsentiert den Eigenwert der Lösung. Das Einsetzen dieser Lösung in die Gleichung (2.25) führt zu einer linearen homogenen Gleichung für $\underline{q}_{ij\lambda}$:

$$(\lambda_{ij}^2 \underline{\underline{M}}_i + \underline{\underline{K}}_i) \underline{q}_{ij\lambda} = \underline{0}, \quad (2.28)$$

deren Koeffizientenmatrix von λ_{ij}^2 abhängt. Um nicht triviale Lösungen dieser Gleichung zu finden, die durch die Eigenvektoren $\underline{q}_{ij\lambda}$ des Systems bestimmt sind, müssen die dazu gehörenden Eigenwerte λ_{ij} gefunden werden. Sie werden aus der charakteristischen Gleichung ermittelt, die sich aus dem Verschwinden der Determinante des Ausdruckes ergibt

$$\det(\lambda_{ij}^2 \underline{\underline{M}}_i + \underline{\underline{K}}_i) = 0. \quad (2.29)$$

Aus der charakteristischen Gleichung n -ten Grades in λ_{ij}^2 resultieren die Wurzeln, die für reelle, symmetrische und positiv definite Matrizen $\underline{\underline{M}}_i = \underline{\underline{M}}_i^T > \underline{\underline{0}}$ und $\underline{\underline{K}}_i = \underline{\underline{K}}_i^T > \underline{\underline{0}}$ alle negativ reell sind [81]. Das kann gleichermaßen durch den *Rayleigh-Quotient* formuliert werden, indem die Gleichung (2.28) von links mit $\underline{q_{ij\lambda}}$ multipliziert und nach λ_{ij}^2 aufgelöst wird

$$\lambda_{ij}^2 = -\frac{\underline{q_{ij\lambda}}^T \underline{\underline{K}}_i \underline{q_{ij\lambda}}}{\underline{q_{ij\lambda}}^T \underline{\underline{M}}_i \underline{q_{ij\lambda}}}. \quad (2.30)$$

Jeder Wurzel λ_{ij}^2 entspricht ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte, welche für den dämpfungsfreien Fall rein imaginär sind

$$\lambda_{ij1} = +i\omega_{ij}, \quad \lambda_{ij2} = -i\omega_{ij}, \quad j = 1 \dots n, \quad (2.31)$$

wobei die ω_{ij} die gesuchten Eigenkreisfrequenzen des Schwingungssystems sind. Die rein imaginären Eigenwerte ergeben n reelle linear unabhängige Eigenvektoren $\underline{q_{ij\lambda}}$. Wegen der Homogenität der Gleichung (2.28) werden die Eigenvektoren nur bis auf einen konstanten Faktor festgelegt. Durch eine geeignete Normierung lässt sich aber die Willkür bei der Wahl des Faktors eliminieren. Die Lösung für die ungedämpften Schwingungen (2.25) ergibt sich aus der Überlagerung aller n -monofrequenten Schwingungen. Sie kann in der Form (2.21)

$$\tilde{w}_i(x, t) = \sum_{j=1}^n \underline{q_{ij\lambda}} c_{ij} \cos(\omega_{ij}t - \varphi_{ij}) \quad (2.32)$$

ausgedrückt werden, wobei c_{ij} eine Konstante zur Anpassung der Lösung an die physikalischen Gegebenheiten bezeichnet. Die Eigenvektoren $\underline{q_{ij\lambda}}$ charakterisieren dabei die Eigenschwingungsformen der einzelnen Moden für eine gegebene Ortskoordinate x und damit auch die Amplitude der jeweiligen Schwingung. Die Genauigkeit der genäherten Lösung wächst mit der Zahl der betrachteten Schwingungsmoden.

Die Berücksichtigung der Dämpfung in der Gleichung (2.26) führt beim Eigenwertproblem zu konjugiert komplexen Eigenwerten, die im Gegensatz zum dämpfungsfreien Fall einen Realteil besitzen. Der Realteil bestimmt das Abklingverhalten der Lösung. Die Eigenvektoren bilden parallel zu den Eigenwerten konjugiert komplexe Paare. Bei der Annahme $\underline{\underline{M}}_i = \underline{\underline{M}}_i^T > \underline{\underline{0}}$ und $\underline{\underline{K}}_i = \underline{\underline{K}}_i^T > \underline{\underline{0}}$ ist das Abklingverhalten des Systems (2.26) nur von den Eigenschaften der Dämpfungsmatrix $\underline{\underline{D}}_i$ abhängig. Ist diese Matrix symmetrisch und positiv definit $\underline{\underline{D}}_i = \underline{\underline{D}}_i^T > \underline{\underline{0}}$, so ist das System in seiner Gleichgewichtslage asymptotisch stabil. Wenn aber diese Matrix symmetrisch, positiv semidefinit, d.h. $\underline{\underline{D}}_i = \underline{\underline{D}}_i^T \geq \underline{\underline{0}}$, ist, muss noch geprüft werden, ob im System Kopplungen vorhanden sind, die alle Bewegungsformen dämpfen.

Sind solche Kopplungen vorhanden, weist ein System eine *durchdringende Dämpfung* auf. Die Antwort des Systems auf Störungen seiner Gleichgewichtslage ist dann ebenfalls asymptotisch stabil. Anderenfalls existieren Moden, die nicht gedämpft werden, was zu ungedämpften Schwingungen dieser Moden und folglich des Systems führt. Die Lösung für freie gedämpfte Schwingungen, bei der Annahme $0 < d_{ij} < 1$, nimmt dann die bekannte Form

$$\tilde{w}_i(x, t) = \sum_{j=1}^n \underline{q_{ij\lambda}} c_{ij} e^{-d_{ij}\omega_{ij}t} \cos(\sqrt{1 - d_{ij}^2} \omega_{ij}t - \varphi_{ij}) \quad (2.33)$$

an. Dieses Ergebnis stellt eine Approximation der exakten Lösung aus Gleichung (2.20) dar. Für $d_{ij} = 0$ sind die Schwingungen ungedämpft und (2.33) geht in (2.32) über.

In der Praxis besteht oft das Problem der Bestimmung der Dämpfungsfaktoren d_{ij} besonders für die höheren Moden [81]. Dabei kann eine konstante strukturelle Dämpfung angenommen werden, wobei die Dämpfung der höheren Moden der Dämpfung der Grundmode entspricht, d.h. $d_{ij} = d_{i1}$, $j = 2 \dots n$. Ausgehend von der Bequemlichkeithypothese kann auch eine viskose proportionale Dämpfung vorgeschlagen werden

$$d_{ij} = d_{i1} \cdot \frac{\omega_{ij}}{\omega_{i1}}, \quad j = 2 \dots n. \quad (2.34)$$

Die viskose Dämpfung berücksichtigt die Erfahrung, dass die höheren Schwingungsmoden häufiger stärker gedämpft sind als die niedrigen.

Finite Elemente Methode - FEM

Das *Ritz-Verfahren* liefert eine Näherungslösung für die partielle Differentialgleichung (PDE), welche das dynamische Verhalten eines elastischen Körpers beschreibt. Einen globalen *Ritz-Ansatz* (2.21) für das gesamte elastische Element zu finden, erweist sich als sehr schwierig und ist nur für geometrisch einfache Primitive möglich. Sogar in diesen einfachen Fällen bringt die Anwendung der globalen Ansatzfunktionen einen erheblichen Nachteil mit sich [117]. Wenn das elastische Element stückweise konstante Querschnitte aufweist oder wenn an beliebigen Stellen Einzelkräfte einwirken, was bei dem Einsatz einer flächigen Piezoaktuatorik der Fall ist, führt der globale Ansatz zu beträchtlichen Fehlern in der Modellierung. Das gilt insbesondere für die Abbildung der hervorgerufenen Spannungen [24, 140]. Dieses Problem kann durch eine physikalische Diskretisierung des Kontinuums in eine endliche Zahl von Teilkörpern endlicher Länge behoben werden. Auf diese Weise können geometrisch komplexe Strukturen mathematisch beschrieben werden. Diese Vorgehensweise ist in der Literatur als

Finite-Elemente-Methode (FEM) bekannt [24, 39, 117]. In dieser Methode wird ein elastischer Körper in geeignete Teile, die finiten Elemente, zerlegt, die durch die Knoten an ihren Rändern verbunden sind. Im Allgemeinen ist das einzelne finite Element ein deformierbarer Körper, welcher nach den Vorstellungen der Kontinuumsmechanik modelliert werden kann [117]. Das Verhalten jedes Elementes wird durch das Verhalten seiner Knoten beschrieben. Die Wahl der Elemente wird so durchgeführt, das die Verformungen und die zugehörigen inneren Kräfte in jedem Teilelement mit Hilfe lokaler *Ritz-Ansätze* gut approximiert werden können. Dabei kann die Ordnung und damit die Genauigkeit des *Ritz-Ansatzes* durch die Einführung zusätzlicher Knoten in einem finiten Element erhöht werden. Die gesamte Lösung für das Kontinuum setzt sich aus den lokalen Lösungen der Teilelemente unter Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen zusammen. Neben den Stetigkeitsbedingungen zwischen den Knoten des Elementes müssen noch die Randbedingungen an den Rändern des Kontinuums berücksichtigt werden. Die so gewonnene Lösung erlaubt eine gute Wiedergabe der Verformungen und inneren Kräfte des modellierten Körpers. Die FE-Methode kann somit als *Ritz-Verfahren* mit stückweise definierten Näherungsfunktionen aufgefasst werden. Bei Verfeinerung der Diskretisierung garantiert diese Methode die Konvergenz der Näherung gegen die exakte Lösung. Die FE-Methode ermöglicht bei ausreichend guter Diskretisierung eine gute Abbildung der Realität. Deswegen wird sie als Standardverfahren bei der Modellierung elastischer Strukturen in vielen Bereichen der Technik verwendet, wie z.B. Bauwesen, Automobil, Flugzeugtechnik und Maschinenbau [13]. Sie wird ebenfalls in der Robotik zur Modellierung der elastischen Elemente der Roboterstruktur eingesetzt [11, 42, 50, 105, 139]. Die Forderung nach ausreichender Genauigkeit kann bei dieser Methode zu Modellen höherer Ordnung führen, bei denen Tausende von Variablen keine Seltenheit sind. Die Handhabung solcher Gleichungen kann sehr kompliziert sein. Aus diesem Grund wurden Programme wie z.B. SIMPACK oder ANSYS entwickelt, welche die Modellierung mit der FE-Methode effizient unterstützen und teilweise automatisieren [77, 130].

In Bild 2.4 ist ein elastischer Arm dargestellt, welcher in n_e finite Elemente, mit $n_e + 1$ Knoten, aufgeteilt wurde. Der erste und der letzte Knoten stellen gleichzeitig die realen Gelenke des Armes dar. Das finite Element kann im Allgemeinen mehrere Knoten besitzen, die sich durch sechs Raumkoordinaten, drei Translationen und drei Rotationen, beschreiben lassen [11]. Die benachbarten Elemente sind an den Knoten verbunden. In dem diskutierten, eindimensionalen Fall besitzt das j -te Element zwei Knoten q_{ij} und q_{ij+1} . Beide Knoten sind in dem lokalen Referenzsystem O_i des elastischen Körpers durch zwei Variablen beschrieben

$$\underline{q}_{ije} = \begin{bmatrix} \underline{q}_{ij}^T & \underline{q}_{ij+1}^T \end{bmatrix} = [\tilde{w}_{ij} \quad \tilde{w}'_{ij} \quad \tilde{w}_{ij+1} \quad \tilde{w}'_{ij+1}] . \quad (2.35)$$

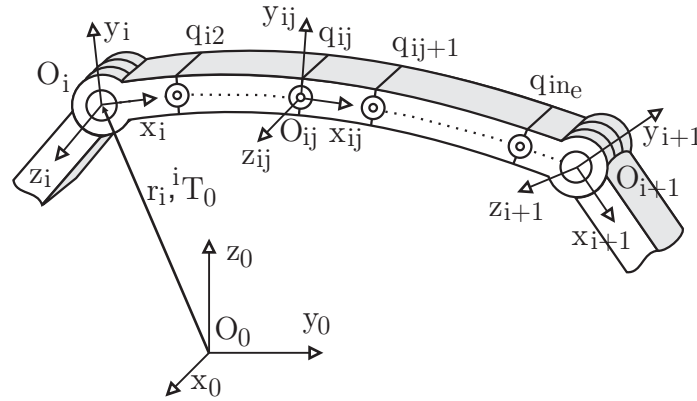


Bild 2.4: Finite Elemente Methode - Diskretisierung eines elastischen Roboterarmes

wobei $\underline{q}_{ije} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ den Vektor der Koordinaten des Teilkörpers bezeichnet. Die Anzahl der Variablen in jedem Knoten ergibt sich aus dem Potential der Balkenbiegung (2.11), wo eine zweifache Ableitung des \tilde{w}_{ij} Verschiebungsvektors nach x auftritt. Die geometrischen Randbedingungen (Stetigkeitsbedingungen) müssen deswegen sowohl für den \tilde{w}_{ij} Vektor selbst als auch seine erste örtliche Ableitung \tilde{w}'_{ij} , die Neigung, erfüllt werden. Die verwendeten Ansatzfunktionen müssen dabei wenigstens zu der Klasse C^1 gehören. Da aber ein finites Biegeelement zwei Knoten besitzt, woraus vier unbekannte Knotengrößen resultieren, besteht der niedrigste Polynomsatz, welcher eine Lösung dieses Gleichungssystems ermöglicht, aus einem kubischen Polynom [39]. Bei den axialen Deformationen dagegen können die Stetigkeitsanforderungen schon mit den Ansatzfunktionen der Klasse C^0 , linearen Funktionen, erfüllt werden. Unter anderem aus diesem Grund wurde eine Biegedeformation, als Basis für diese Analyse gewählt. Als Ansatzfunktion für das finite Biegeelement kann, wie schon erwähnt, ein *Hermite-Polynom* eingesetzt werden. Die Biegedeformation für das j -ten Element des i -tes Armes kann in folgender Form geschrieben werden

$$\tilde{w}_{ije}(\xi_{ij}, t) = \begin{bmatrix} H_{ij} & H'_{ij} & H_{ij+1} & H'_{ij+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_{ij} \\ \tilde{w}'_{ij} \\ \tilde{w}_{ij+1} \\ \tilde{w}'_{ij+1} \end{bmatrix} = \underline{N}_{ij}^T(\xi_{ij}) \cdot \underline{q}_{ije}(t) \quad (2.36)$$

wobei

$$\xi_{ij} = x/l_{ij}, \quad 0 \leq x \leq l_{ij}, \quad (2.37)$$

$$H_{ij}(\xi_{ij}) = 1 - 3\xi_{ij}^2 + 2\xi_{ij}^3, \quad (2.38)$$

$$H'_{ij}(\xi_{ij}) = l_{ij}(\xi_{ij} - 2\xi_{ij}^2 + \xi_{ij}^3), \quad (2.39)$$

$$H_{ij+1}(\xi_{ij}) = 3\xi_{ij}^2 - 2\xi_{ij}^3, \quad (2.40)$$

$$H'_{ij+1}(\xi_{ij}) = l_{ij}(-\xi_{ij}^2 + \xi_{ij}^3). \quad (2.41)$$

Die Ansatzfunktionen sind in normierten Koordinaten ξ_{ij} formuliert, welche sich nur auf das j -te Element der Länge l_{ij} beziehen. Die Dynamikgleichung für das j -te finite Element kann nun ähnlich wie im *Ritz-Verfahren* durch das Einsetzen der Näherungslösung (2.36) in die Energieausdrücke gewonnen werden. Die kinetische Energie nimmt die Form

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{1}{2} \int_0^{l_{ij}} \mu_i(x) \dot{w}_i^2(x, t) dx \approx \frac{1}{2} \int_0^1 \mu_i(\xi_{ij}) \dot{\tilde{w}}_{ije}^2(\xi_{ij}, t) d\xi_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \underline{\dot{q}_{ije}}^T(t) \left[\int_0^1 \mu_i(\xi_{ij}) \underline{N_{ij}}^T(\xi_{ij}) \underline{N_{ij}}(\xi_{ij}) d\xi_{ij} \right] \underline{\dot{q}_{ije}}(t) \\ &= \frac{1}{2} \underline{\dot{q}_{ije}}^T(t) \underline{\underline{M_{ij}}} \underline{\dot{q}_{ije}}(t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

an. $\underline{\underline{M_{ij}}} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ist eine symmetrische, positiv definite Trägheitsmatrix. Die potenzielle Energie kann auf ähnliche Weise ermittelt werden

$$\begin{aligned} V_{ij} &= \frac{1}{2} \int_0^{l_{ij}} EI_i(x) w_i''^2(x, t) dx \approx \frac{1}{2} \int_0^1 EI_i(\xi_{ij}) \tilde{w}_{ije}''^2(\xi_{ij}, t) d\xi_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \underline{q_{ije}}^T(t) \left[\int_0^1 EI_i(\xi_{ij}) \underline{N_{ij}}''^T(\xi_{ij}) \underline{N_{ij}}''(\xi_{ij}) d\xi_{ij} \right] \underline{q_{ije}}(t) \\ &= \frac{1}{2} \underline{q_{ije}}^T(t) \underline{\underline{K_{ij}}} \underline{q_{ije}}(t), \end{aligned} \quad (2.43)$$

mit einer symmetrischen Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K_{ij}}} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, die positiv definit bzw. positiv semidefinit ist. Einsetzen der beiden Energieausdrücke in die Gleichung (2.22) und deren Lösung nach $\underline{q_{ije}}(t)$ führt zu der Matrixform der Bewegungsgleichung der freien ungedämpften Schwingungen eines finiten Elementes

$$\underline{\underline{M_{ij}}} \underline{\ddot{q}_{ije}}(t) + \underline{\underline{K_{ij}}} \underline{q_{ije}}(t) = \underline{0}. \quad (2.44)$$

Die Berücksichtigung der axialen Deformationen in diesen Gleichungen würde die Dimension der Matrizen auf $\underline{\underline{M_{ij}}}, \underline{\underline{K_{ij}}} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ erhöhen. Die gleiche Dimension wird erreicht, wenn die Gleichung (2.44) in die globalen Koordinaten der xy -Ebene transformiert wird. Die Betrachtung aller sechs Freiheitsgrade eines Knotens im Raum würde zu der maximalen Dimension dieser Matrizen für das einzelne finite Element gemäß $\underline{\underline{M_{ij}}}, \underline{\underline{K_{ij}}} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ führen. Die Bewegungsgleichung für das gesamte Kontinuum wird unter Berücksichtigung sowohl der Randbe-

dingungen an den Rändern, als auch der Stetigkeitsbedingungen zwischen einzelnen Knoten erstellt. Die Matrizen dieser Dynamikgleichung ergeben sich aus der Addition der Elemente der jeweiligen Matrizen der finiten Elemente, welche zu den gleichen Knoten gehören

$$\underline{\underline{M}}_i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{M}}_{ij}, \quad (2.45)$$

$$\underline{\underline{K}}_i = \sum_{j=1}^{n_e} \underline{\underline{K}}_{ij}. \quad (2.46)$$

Die Trägheitsmatrix und Steifigkeitsmatrix sind bei günstiger Nummerierung der Knoten nur schwach besetzt, in Form eines schmalen Bandes um die Hauptdiagonale [24, 117]. In der xy -Ebene beträgt die Dimension der Matrizen $\underline{\underline{M}}_i, \underline{\underline{K}}_i \in \mathbb{R}^{3(n_e+1) \times 3(n_e+1)}$. Die Formulierung der Matrizen in Knotenkoordinaten

$$\underline{q}_{ie} = \left[\underline{q}_{i1e}^T \cdots \underline{q}_{ije}^T \cdots \underline{q}_{i(n_e+1)e}^T \right]^T \quad (2.47)$$

reduziert die Dimension, so dass $\underline{\underline{M}}_i, \underline{\underline{K}}_i \in \mathbb{R}^{2(n_e+1) \times 2(n_e+1)}$ gilt. Unter Berücksichtigung der modalen Dämpfungsmatrix $\underline{\underline{D}}_i = \alpha_i \underline{\underline{M}}_i + \beta_i \underline{\underline{K}}_i$ kann die Dynamikgleichung der freien gedämpften Schwingungen für das gesamte Element in bekannter Form geschrieben werden

$$\underline{\underline{M}}_i \ddot{\underline{q}}_{ie}(t) + \underline{\underline{D}}_i \dot{\underline{q}}_{ie}(t) + \underline{\underline{K}}_i \underline{q}_{ie}(t) = \underline{0}. \quad (2.48)$$

Diese Gleichung hat genau die Form der Dynamikgleichung (2.26), welche im *Ritz-Verfahren* hergeleitet wurde. Die Ergebnisse der damals durchgeführten Analyse gelten somit ebenfalls für diese Gleichung. Abhängig von den Anforderungen an die Genauigkeit der Näherung können die hergeleiteten Modelle höherer Ordnung sein, was ihre Berechnung in Echtzeit unter Umständen verhindert.

Methode der konzentrierten Parameter

Die aus der FE-Methode hergeleiteten Modelle liefern eine gute Beschreibung sowohl der geometrischen Verformung der Struktur als auch ihrer inneren Kräfte und Momente. Der Preis dafür sind aber Modelle höherer Ordnung. Sie können bei den hoch dynamischen Manipulatoren die Berechnung der Dynamikgleichungen komplizieren. Daher muss eine Reduktion der Modellordnung durchgeführt werden. Sie stellt einen Kompromiss zwischen der Genauigkeit der Abbildung und der Rechenzeit dar. Abgesehen von einer geeigneten Wahl der

Koordinaten, welche für das gewählte Modell zu einer minimalen Anzahl verallgemeinerter Koordinaten führt, kann diese Reduktion durch die Vereinfachung des Modells erzielt werden. Die dominanten Effekte im System werden durch diskrete konzentrierte Parameter beschrieben [10, 47]. Als Beispiel kann hier die Elastizität einer Motor- oder Getriebewelle in einem Gelenk eines seriellen Manipulators genannt werden. Es ist in der Praxis üblich, sie durch nur einen Parameter, eine konzentrierte Steifigkeit der Welle k_w , also eine Feder, zu beschreiben [53, 121, 134]. Da jede Schwingung in einem realen System einer Dämpfung unterliegt, wird in dem entsprechenden Ersatzmodell jede Feder durch eine konzentrierte Dämpfung d_w ergänzt.

Mit der Methode der konzentrierten Parameter lassen sich auch die Deformationen der elastischen Arme des Manipulators beschreiben. Diese Vorgehensweise ist ähnlich der FE-Methode. Der elastische Arm des Manipulators in Bild 2.4 wird in n_e , diesmal aber starre, Elemente geteilt, welche durch die n_e Knoten verbunden sind. Der Knoten n_{e+1} stellt einen Endknoten des i -ten Armes und gleichzeitig den ersten Knoten des $i + 1$ Elementes dar. Seine Position kann aus den Koordinaten der n_e Knoten des i -ten Armes berechnet werden. Im Fall eines Biegebalkens in der xy -Ebene besitzt ein Knoten genau einen Freiheitsgrad, eine Rotation, die durch den Winkel q_{ij} zwischen den benachbarten Bezugssystemen O_{ij-1} und O_{ij} der einzelnen starren Elemente beschrieben wird

$$\underline{q}_{ie} = [q_{i1} \ \dots \ q_{ij} \ \dots \ q_{in_e}]^T. \quad (2.49)$$

Der elastische Arm wird somit als Mehrkörpersystem modelliert [42, 117]. Die Teilkörper eines solchen Armes werden mit masselosen Federn und Dämpfern sowie eventuell massenbehafteten Aktoren verbunden. Die Platzierung der Knoten in so einem Element wird auf Grund der Analyse der Eigenformen des Elementes durchgeführt [149]. Im Fall einer axialen Deformation entspricht ein Knoten einem translatorischen Freiheitsgrad und das gewonnene Modell kann unter Umständen einem aus der FE-Methode hergeleiteten Modell gleichen. Die kinetische Energie des j -ten Körpers des i -ten Armes wird auf gleiche Weise hergeleitet, wie es für die Starrkörper eines starren seriellen Manipulators geschieht [121]. Um die kinetische Energie zu berechnen, müssen zuerst die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten der verallgemeinerten Gelenkkoordinaten (2.49) und den translatorischen $\underline{v}_{ijt} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ und rotatorischen $\underline{v}_{ijr} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ Geschwindigkeiten des Teilkörpers im kartesischen Raum angegeben werden. Sie werden mit Hilfe der Jacobimatrix formuliert [136]:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_{ijt} \\ \underline{v}_{ijr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}_{ijt} \\ \underline{J}_{ijr} \end{bmatrix} \underline{\dot{q}}_{ie}. \quad (2.50)$$

Die kinetische Energie, mit ihrem translatorischen und rotatorischen Anteil, nimmt die Form

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{1}{2} \underline{v}_{ijt}^T \left(\int_0^{l_{ij}} \mu_i(x) dx \right) \underline{v}_{ijt} + \frac{1}{2} \underline{v}_{ijr}^T \underline{I}_{ij} \underline{v}_{ijr} \\ &= \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_{ie}^T \left(\underline{J}_{ijt}^T m_{ij} \underline{J}_{ijt} + \underline{J}_{ijr}^T \underline{I}_{ij} \underline{J}_{ijr} \right) \underline{\dot{q}}_{ie} = \underline{\dot{q}}_{ie}^T \underline{M}_{ij} \underline{\dot{q}}_{ie} \end{aligned} \quad (2.51)$$

an, wobei \underline{v}_{ijt} den Vektor der translatorischen Geschwindigkeiten des Schwerpunktes des j -ten Körpers im Referenzsystem O_i , m_{ij} die Masse des j -ten Körpers, \underline{v}_{ijr} den Vektor der rotatorischen Geschwindigkeiten des j -ten Körpers im Referenzsystem O_i und \underline{I}_{ij} den varianten Trägheitstensor bezogen auf den Schwerpunkt des j -ten Körpers ausgedrückt im Referenzsystem O_i bezeichnen. Die potenzielle Energie der Deformation der j -ten Feder kann in einfacher Form

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \underline{q}_{ij}^2 k_{ij} \quad (2.52)$$

ausgedrückt werden, wobei $k_{ij} > 0$ die konzentrierte Steifigkeit des j -ten Gelenkes bezeichnet. Bei der Annahme der modalen Dämpfung kann auch die dazu gehörende *Rayleighsche Dissipationsfunktion* angegeben werden

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_{ij}^2 d_{ij}, \quad (2.53)$$

wobei $d_{ij} \geq 0$ den Dämpfungsfaktor bezeichnet. Die kinetischen und potentiellen Energien des jeweiligen Teilkörpers des i -ten Armes, ausgedrückt in seinem Referenzsystem O_i , können zu einer *Lagrangefunktion* des i -ten Körpers zusammengefasst werden

$$L_i = \sum_{j=1}^{n_e} T_{ij} - \sum_{j=1}^{n_e} V_{ij}. \quad (2.54)$$

Die *Rayleighsche Dissipationsfunktion* der jeweiligen Elemente wird ebenfalls summiert

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_e} R_{ij}. \quad (2.55)$$

Nach der Modifikation der *Lagrangeschen Gleichungen 2. Art* aus (2.22) und Berücksichtigung der Dissipationsfunktion

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \underline{\dot{q}}_{ie}} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial \underline{q}_{ie}} + \frac{\partial R_i}{\partial \underline{\dot{q}}_{ie}} = \underline{0} \quad (2.56)$$

kann die homogene Bewegungsgleichung für den i -ten Arm in bekannter Form geschrieben werden. Das Einsetzen von (2.54) und (2.55) in (2.56) und die Lösung dieses Gleichungssystems führt zu den Bewegungsgleichungen (ODE) in Matrixform, welche den schon bekannten Lösungen (2.26) und (2.48) ähneln

$$\underline{\underline{M}}_i(\underline{q}_{ie}) \ddot{\underline{q}}_{ie}(t) + (\underline{\underline{C}}_i(\dot{\underline{q}}_{ie}, \underline{q}_{ie}) + \underline{\underline{D}}_i) \dot{\underline{q}}_{ie}(t) + \underline{\underline{K}}_i \underline{q}_{ie}(t) = \underline{0}. \quad (2.57)$$

Die Matrix $\underline{\underline{C}}_i(\dot{\underline{q}}_{ie}, \underline{q}_{ie})$ erfasst die Coriolis- und Zentrifugalkräfte. Diese Matrix resultiert aus dem rotatorischen Anteil der kinetischen Energie. Da sie ebenfalls wie die Dämpfungsmatrix $\underline{\underline{D}}_i$ von der Geschwindigkeit abhängig ist, kann sie entweder als Beitrag zu der Systemdämpfung (dynamische Versteifung) betrachtet oder bei Vernachlässigung der Rotationsträgheit, gemäß der *Bernoullischen Balkentheorie* mit dem Trägheitstensor $\underline{\underline{I}}_{ij} = \underline{0}$ und damit auch $\underline{\underline{C}}_i = \underline{0}$, vernachlässigt werden [81]. In diesen beiden Fällen nimmt die Bewegungsgleichung für den elastischen Arm genau die gleiche Form an, wie in den Gleichungen (2.26) und (2.48). Die Matrizen $\underline{\underline{K}}_i$ und $\underline{\underline{D}}_i$ sind diagonal, wenn jedem rotatorischen Freiheitsgrad in dem modellierten Arm nur ein Feder-Dämpfer-Paar entspricht. Unter bestimmten Bedingungen kann es aber nötig sein, einem Feder-Dämpfer-Paar mehrere Freiheitsgrade zuzuordnen, was die Komplexität der beiden Matrizen entsprechend erhöht.

2.3.3 Zusammenfassung

Die Deformation eines Kontinuums kann mittels einer partiellen Differentialgleichung (PDE) sehr genau beschrieben werden (2.15). Das ist aber nur für geometrisch einfache Primitive möglich. Dieselbe Begrenzung gilt für das *Ritz-Verfahren* mit den globalen Ansatzfunktionen und seiner Näherungslösung (2.26) in Form der gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODE). Erst die FE-Methode ermöglicht eine genäherte Beschreibung geometrisch komplizierter Kontinua. Die Lösung in diesem Verfahren (2.48) wird ebenfalls mit Hilfe der gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODE) formuliert. Der Nachteil dieser Methode ist die hohe Ordnung der Matrizen, wodurch sich die Berechnung der Bewegungsgleichungen in Echtzeit erschweren kann. Eine Möglichkeit zur Reduktion der Ordnung bietet die Methode der konzentrierten Parameter an (2.57). Diese aber ist mit Einbußen hinsichtlich der Genauigkeit der Lösung verbunden. In dem hier besprochenen Beispiel eines elastischen Armes in der xy -Ebene wurde, unter Annahme der gleichen Zahl von $(n_e + 1)$ Knoten, eine Reduktion von $3(n_e + 1)$ Parametern bei dem FE-Model bis auf n_e Parameter bei der Methode der konzentrierten Parameter erreicht. Abhängig von den Genauigkeitsanforderungen und dem Ziel der Modellierung wird für die Beschreibung eines elastischen Elementes eine der beiden zuletzt

erwähnten Methoden verwendet. Beim Einsatz der FE-Methode werden die so modellierten elastischen Roboterelemente nach der Vorgehensweise der Methode der konzentrierten Parameter miteinander verbunden. Die aus den Diskretisierungsverfahren gewonnenen Modelle sind in ihrer Form gleich, unterscheiden sich aber durch die Interpretation der Koordinaten und Genauigkeit der Lösung.

2.4 Relativkinematik

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen für den elastischen Arm oder den ganzen Manipulator erfordert, unabhängig von der gewählten Methode, die Formulierung der Energieausdrücke der zugehörigen Teilkörper in demselben Referenzsystem (2.51). Die Berechnung der kinetischen Energie verlangt zudem die Kenntnis der translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten der jeweiligen Körper. Diese müssen ebenfalls in einem Referenzsystem ausgedrückt werden, O_i für den elastischen Arm und O_0 für den ganzen Manipulator. Die beiden Geschwindigkeiten sind nicht bekannt und müssen aus den gegebenen bzw. gemessenen Geschwindigkeiten $\dot{q}_{ie} \in \mathbb{R}^{n_e \times 1}$ der verallgemeinerten Koordinaten mit Hilfe der Jacobimatrix (2.50) berechnet werden.

Die Jacobimatrix charakterisiert die Abbildung zwischen den Geschwindigkeiten (und auch Kräften) des Gelenkraumes und des kartesischen Raumes. Sie wird aus den kinematischen Beziehungen der Struktur hergeleitet [7, 84, 121, 136]. Die Herleitung der Jacobimatrix wird am Beispiel eines Systems mit konzentrierten Parametern diskutiert, was aber keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt. Es wird angenommen, dass das System durch einzelne n_e -Freiheitsgrade (2.49) beschrieben wird. Im allgemeinen Fall entsprechen diesen n_e -Freiheitsgraden sechs Freiheitsgrade in einem kartesischen Raum, welche Orientierung und Lage der mechanischen Struktur eindeutig beschreiben. Die Jacobimatrix $\underline{\underline{J}}_i$ wird, wie folgt, durch die Spaltenvektoren definiert

$$\underline{\underline{J}}_i = \begin{bmatrix} \underline{J}_{i1} & \dots & \underline{J}_{ij} & \dots & \underline{J}_{ine} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n_e}. \quad (2.58)$$

Je ein Spaltenvektor \underline{J}_{ij} ist mit einem q_{ij} Freiheitsgrad verbunden. Der Spaltenvektor setzt sich dabei aus dem translatorischen und rotatorischen Teil (2.50) zusammen. Die jeweiligen Spaltenvektoren werden, wie schon erwähnt, aus den kinematischen Beziehungen der Struktur hergeleitet, welche durch homogene Transformationsmatrizen nach der *Denavit-Hartenberg* Notation beschrieben sind. In der Gleichung (2.8) wurde eine solche Transformationsmatrix ${}^i T_0$ dargestellt. Sie beschreibt die Orientierung und Lage des O_i System im

Referenzsystem O_0 , gezeigt in Bild 2.4. Eine ähnliche Transformation kann zwischen dem j -ten Körper und dem Referenzsystem O_i des i -ten Armes formuliert werden

$$\underline{c}_i(\underline{x}, t) = \underline{\underline{T}}_i^j \cdot \underline{c}_j(\underline{x}, t). \quad (2.59)$$

Die homogene Transformationmatrix setzt sich dabei aus der Rotationsmatrix und dem Translationsvektor

$$\underline{\underline{T}}_i^j = \begin{pmatrix} {}^jR_i(\underline{q}_{ie}) & {}^j\underline{c}_i(\underline{q}_{ie}) \\ \underline{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

zusammen, wobei ${}^jR_i(\underline{q}_{ie}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die Orientierung des O_j Systems und ${}^j\underline{c}_i(\underline{q}_{ie}) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ seine Lage im O_i Referenzsystem repräsentieren. Da sich nach der *Denavit-Hartenberg* Notation die rotatorischen Freiheitsgrade des Systems immer um die z -Achse bewegen, ist zur Bestimmung der vollständigen Jacobimatrix die Kenntnis der dritten Spalte der jeweiligen Rotationsmatrix, bezeichnet durch ${}^{j-1}\underline{z}_i$, und des Translationsvektors ${}^j\underline{c}_i$ ausreichend. Der Vektor ${}^{j-1}\underline{z}_i$ wird folgendermaßen definiert

$${}^{j-1}\underline{z}_i = \underline{\underline{R}}_i^{j-1}[:, 3](\underline{q}_{ie}) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \quad (2.61)$$

wobei $j = 1 \dots n_e$ und i den Ursprung des O_i Referenzsystems bezeichnet. Der rotatorische Teil der Jacobimatrix nimmt die Form

$$\underline{\underline{J}}_{ir} = [\rho_1 {}^0\underline{z}_i \dots \rho_j {}^{j-1}\underline{z}_i \dots \rho_{n_e} {}^{n_e-1}\underline{z}_i] \in \mathbb{R}^{3 \times n_e} \quad (2.62)$$

an, wobei ρ_j bei einem rotatorischen Freiheitsgrad gleich Eins und bei einem translatorischen gleich Null ist. Zur Herleitung des translatorischen Teiles der Jacobimatrix wird der Vektor der Lage des Koordinatensystems ${}^{n_e}\underline{c}_i(\underline{q}_{ie})$ benötigt

$$\underline{\underline{J}}_{it} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^{n_e}\underline{c}_i(\underline{q}_{ie})}{\partial q_{i1}} & \dots & \frac{\partial {}^{n_e}\underline{c}_i(\underline{q}_{ie})}{\partial q_{ij}} & \dots & \frac{\partial {}^{n_e}\underline{c}_i(\underline{q}_{ie})}{\partial q_{in_e}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times n_e}. \quad (2.63)$$

Die Jacobimatrix (2.58) wird folgendermaßen aus den rotatorischen (2.62) und translatorischen (2.63) Anteilen zusammengesetzt

$$\underline{\underline{J}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{it} \\ \underline{\underline{J}}_{ir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^{n_e}\underline{c}_i(\underline{q}_{ie})}{\partial q_{i1}} & \dots & \frac{\partial {}^{n_e}\underline{c}_i(\underline{q}_{ie})}{\partial q_{ij}} & \dots & \frac{\partial {}^{n_e}\underline{c}_i(\underline{q}_{ie})}{\partial q_{in_e}} \\ \rho_1 {}^0\underline{z}_i & \dots & \rho_j {}^{j-1}\underline{z}_i & \dots & \rho_{n_e} {}^{n_e-1}\underline{z}_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n_e}. \quad (2.64)$$

Die Jacobimatrix zwischen einem beliebigen O_j -ten Koordinatensystem und dem Ursprung O_i (2.50) wird durch das Einsetzen des $\underline{j}c_i(q_{ie})$ Vektors in den translatorischen Teil (2.63) berechnet. Die Ausdrücke für den rotatorischen Anteil (2.62) bleiben unverändert. Für Freiheitsgrade größer als j sind die Einträge in der Jacobimatrix in so einem Fall gleich Null. Um die Energie des j -ten Teilkörpers des i -ten Armes im Inertialsystem O_0 zu formulieren, muss basierend auf den homogenen Transformationsmatrizen $\underline{i}T_0$ aus (2.8) und $\underline{j}T_i$ aus (2.60) eine neue Transformationmatrix berechnet werden

$$\underline{j}T_0 = \underline{i}T_0 \cdot \underline{j}T_i. \quad (2.65)$$

Nach den angegebenen Vorschriften (2.61) - (2.63) kann die Jacobimatrix $\underline{j}J_0$ und damit auch die Energie jedes beliebigen Körpers des Manipulators im O_0 Inertialsystem formuliert werden.

Im Allgemeinen kann die Jacobimatrix bei Kenntnis der kinematischen Beziehungen $\underline{x}_n = \underline{h}_n(q_{i1}, \dots, q_{ine})$ weiter abstrahiert werden

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q_{i1}} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial q_{ine}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial q_{i1}} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial q_{ine}} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{i1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{ine} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

und in Matrixschreibweise

$$\dot{\underline{x}}_n = \underline{J}_i \cdot \dot{\underline{q}}_{ie}. \quad (2.67)$$

Die Beziehung zwischen den Beschleunigungen der beiden Konfigurationsräume ergeben sich nach der Zeitableitung der Gleichung (2.67)

$$\ddot{\underline{x}}_n = \underline{J}_i \cdot \ddot{\underline{q}}_{ie} + \left(\frac{d}{dt} \underline{J}_i \right) \dot{\underline{q}}_{ie}. \quad (2.68)$$

Die Jacobimatrix repräsentiert ebenfalls, wie schon erwähnt, die Abbildung zwischen den Momenten und Kräften der beiden Räume

$$\underline{f}_n = \underline{J}_i^{-T} \cdot \underline{\tau}_{ie}, \quad (2.69)$$

wobei $\underline{f}_n \in \mathbb{R}^n$ den Vektor der Kräfte und Momente im kartesischen Raum und $\underline{\tau}_{ie} \in \mathbb{R}^{n_e}$ den Vektor der Kräfte und Momente im Gelenkraum bezeichnet.

2.5 Analyse des Schwingungsvorgangs

Die Lösung der in Abschnitt 2.3.2 hergeleiteten diskreten Modelle kann als eine endliche Reihe von monofrequenten Schwingungen (2.32) und (2.33) dargestellt werden. Jeder dieser Moden, der monofrequenten Schwingung, kann ein Ersatzmodell in Form eines Feder-Masse-Dämpfer-Schwingers zugeordnet werden. In Bild 2.5(a) ist so ein System mit der Feder-Dämpfer-Anordnung nach dem *Kelvin-Voigt-Modell* dargestellt [39, 47].

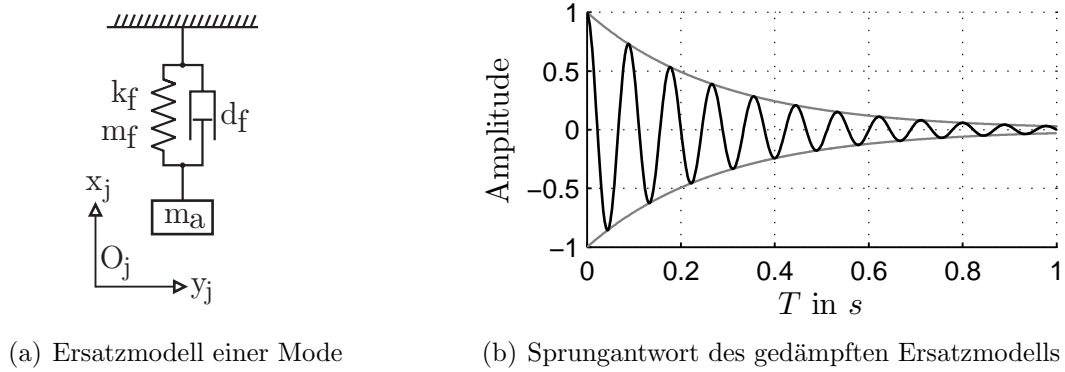


Bild 2.5: Feder-Masse-Dämpfer-Ersatzmodell

Das Aufstellen der Bewegungsgleichung führt für die freie gedämpfte Schwingung zu der homogenen Differentialgleichung

$$m_g \ddot{x}_j + d_f \dot{x}_j + k_f x_j = 0, \quad (2.70)$$

wobei d_f den Dämpfungsfaktor und k_f die Steifigkeit der Feder bezeichnet. Für die masselose Feder ist die effektiv schwingende Masse gleich der konzentrierten Masse $m_g = m_a$. Die Annahme einer masselosen Feder $m_f = 0$ kann allerdings zu Fehlern führen [47, 81]. In der Praxis wird deswegen die Federmasse durch eine Näherung berücksichtigt. Dementsprechend ergibt sich die effektiv schwingende Masse zu

$$m_g = \left(m_a + \frac{1}{3} m_f \right). \quad (2.71)$$

Die Gleichung (2.70) kann umgeschrieben werden in

$$\ddot{x}_j + 2D_0\omega_0\dot{x}_j + \omega_0^2 x_j = 0, \quad (2.72)$$

wobei D_0 das Lehrsche Dämpfungsmaß und ω_0 die Kennkreisfrequenz bezeichnet. Diese Ko-

effizienten werden folgendermaßen definiert

$$D_0 = \frac{d_f}{2\sqrt{k_f m_g}}, \quad (2.73)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_f}{m_g}}. \quad (2.74)$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung (2.72) ist vom Wert des Dämpfungsmaßes D_0 abhängig und kann nach folgenden Fällen unterschieden werden:

1. $D_0 < 0$: tritt bei freien Schwingungen nicht auf

Die Amplitude würde oszillatorisch ansteigen, was Instabilität unter Energiezufuhr implizieren würde.

2. $D_0 = 0$: ungedämpfte Schwingung

Es existiert ein Paar rein imaginärer, konjugiert komplexer Eigenwerte (2.32). Die Antwort lautet:

$$x_j = c_j \cos(\omega_0 t - \varphi_j). \quad (2.75)$$

3. $0 < D_0 < 1$: gedämpfte Schwingung

Ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte mit einem Realteil gemäß (2.33). Die Antwort nimmt folgende Form an:

$$x_j = c_j e^{-D_0 \omega_0 t} \cos(\sqrt{1 - D_0^2} \omega_0 t - \varphi_j). \quad (2.76)$$

Diese Art der Schwingung tritt in der Realität am häufigsten auf. Der Ablauf dieser Schwingung wurde in Bild 2.5(b) dargestellt. Der Abfall der Amplitude wird durch eine Hüllkurve beschrieben:

$$x_{jh} = \pm c_j e^{-D_0 \omega_0 t}. \quad (2.77)$$

Die Extrema der Schwingung liegen nicht auf der Hüllkurve.

4. $D_0 = 1$: aperiodischer Grenzfall, keine Schwingung

Es existiert ein Paar reeller Eigenwerte, ein Doppelwurzel. Die Antwort kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$x_j = (c_{j1} + c_{j2}t)e^{-D_0 \omega_0 t}. \quad (2.78)$$

Das System kehrt schnellstmöglich ohne zu schwingen in seine Ruhelage zurück.

5. $D_0 > 1$: Kriechbewegung, keine Schwingung

Es liegt ein Paar reeller Eigenwerte vor. Die Antwort lautet:

$$x_j = c_{j1} e^{-D_0 \omega_0 - \sqrt{D_0^2 - 1}} + c_{j2} e^{-D_0 \omega_0 + \sqrt{D_0^2 - 1}}. \quad (2.79)$$

Das System kehrt, abhängig von seinen Eigenwerten, langsamer als im Fall $D_0 = 1$ zu seiner Ruhelage zurück.

Die Faktoren: c_j , $c_{j1,2}$ und φ_j sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen. Die Herleitungen und genauere Informationen zu dieser kurzen Analyse können zahlreicher Literaturstellen entnommen werden [27, 47, 81, 106].

3 Kinematik eines elastischen parallelen Manipulators

3.1 Problemstellung der Kinematik

Ein Manipulator setzt sich aus mehreren mechanischen Elementen zusammen, die so miteinander und mit den Aktoren verbunden sind, dass eine gezielte Bewegung der ganzen Konstruktion möglich ist. Die Geometrie dieser Elemente und ihre zulässigen Konfigurationen determinieren den durch den Endeffektor des Manipulators erreichbaren kartesischen Raum - den Arbeitsraum. Das Problem der Kinematik kann im Allgemeinen als Suche nach den Beziehungen zwischen den Positionen/Winkeln, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Antriebe und des Endeffektors formuliert werden. Im Vordergrund steht aber die Suche nach den Abhängigkeiten zwischen den Positionen, da die übrigen Relationen daraus abgeleitet werden können [84, 136]. Die Bestimmung dieser Beziehungen setzt sich aus zwei Aufgaben zusammen. Die erste Aufgabe beinhaltet die Bestimmung der Endeffektorposition - der Lage und der Orientierung - bei Kenntnis der Positionen/Winkelstellungen der Antriebe, das *direkte kinematische Problem* (DKP). Die zweite Aufgabe besteht in der Ermittlung der Positionen/Winkelstellungen der Antriebe bei gegebener Position des Endeffektors, das *inverse kinematische Problem* (IKP).

Das *direkte kinematische Problem* gestaltet sich bei den parallelen Manipulatoren deutlich komplizierter, als das bei den seriellen Kinematiken der Fall ist. Die in der Struktur der seriellen Manipulatoren vorhandenen Gelenke besitzen nur aktive, d.h. aktuierte Freiheitsgrade, so dass die Bestimmung der Endeffektorposition auf einfache Weise aus der *Denavit- Hartenberg* Notation erfolgen kann [7, 121]. Natürlich muss der Roboter vorher kalibriert werden und es sind gewisse Annahmen bezüglich seines Konfigurationsraumes zu treffen. Dies gilt aber für alle Arten von Manipulatoren. Im Gegensatz dazu besitzen die parallelen Manipulatoren passive Gelenke, die durch ein, zwei oder drei Freiheitsgrade charakterisiert werden können. Die Positionen/Winkelstellungen dieser passiven Gelenke sind eigentlich nicht bekannt und

können nicht immer gemessen werden [43]. Aus diesen Gründen müssen Verfahren entwickelt und angewendet werden, welche die Berechnung der Endeffektorposition nur bei einer bekannten Stellung der Antriebe ermöglichen. Da die parallelen Architekturen sich stark voneinander unterscheiden gibt es mehrere Methoden zur Lösung des DKP's, wie z.B. die *Denavit-Hartenberg* Methode, die geometrische Methode, die Tetrahedron-Methode, die Methode der Polynome oder die Methode der ähnlichen Plattformen [37, 56, 84, 103, 120, 136]. Im Rahmen dieser Arbeit wird zusätzlich eine trigonometrische Methode entwickelt und vorgeschlagen [122]. Das *inverse kinematische Problem* ist, im Vergleich zum DKP und auch dem IKP der seriellen Manipulatoren, deutlich einfacher zu lösen, was im Verlauf dieses Kapitels gezeigt wird. Ein weiteres Problem bei der Herleitung der beiden kinematischen Beziehungen ist die Einführung der Bedingungen, welche zum einen die Eindeutigkeit der Lösung garantieren und zum anderen die korrekte Definition des Arbeitsraumes ermöglichen [122]. Diese Bedingungen resultieren sowohl aus der Singularität der Jacobimatrix der direkten und inversen Kinematik als auch der Geometrie der Roboterstruktur [56, 136]. Wegen der Komplexität der Kinematik und unterschiedlicher Bedingungen, die berücksichtigt werden müssen, ist diese Aufgabe nicht trivial. Es werden deswegen zwei Methoden zur Lösung dieses Problems und damit zur korrekten Bestimmung des Arbeitsraumes vorgeschlagen.

Die Betrachtung der elastischen Deformationen kann von der Herleitung der direkten und inversen Kinematik getrennt durchgeführt werden. Ein Grund dafür ist die Tatsache, dass die elastischen Freiheitsgrade zum Satz der unabhängigen Größen gehören. Aus diesem Grund muss die Deformation jedes elastischen Roboterelementes entweder gemessen oder durch einen Beobachter geschätzt werden. In den Gleichungen der Kinematik kann die Deformation durch den Abstand zwischen den Endpunkten des elastischen Elementes substituiert werden. Zusätzlich wird angenommen, dass diese Deformationen im mm oder μm -Bereich stattfinden, so dass sie zwar von großer Bedeutung für die Positionierungs- und Wiederholgenauigkeit sind, die globale Bewegung des Manipulators aber nur wenig beeinflussen. In diesem Sinne kann die Analyse des DKP's und IKP's so durchgeführt werden, als ob die Konstruktion starr wäre. Es können aber keine Annahmen getroffen werden, welche eine konstante Länge und/oder Orientierung der Roboterelemente voraussetzen.

Die in diesem und den folgenden Kapiteln präsentierten Methoden werden am Beispiel des parallelen Manipulators FÜNFGELENK besprochen, siehe Bild 1.1(a). Seine einfache parallele Kinematik ermöglicht eine überschaubare Beschreibung und Diskussion der präsentierten Methoden ohne Verlust der Allgemeingültigkeit.

3.2 Direkte Kinematik

Die Standardmethoden nach *Denavit-Hartenberg* und die geometrische Methode werden zuerst vorgestellt und diskutiert, um die Probleme bei der Herleitung der direkten Kinematik zu analysieren. Anschließend wird eine neu entwickelte trigonometrische Methode präsentiert.

3.2.1 Denavit-Hartenberg Methode

Diese Methode wird wegen ihrer Allgemeinheit und dem direkten Bezug zu den seriellen Kinematiken besprochen [136]. Sie wird aber bei der Herleitung der kinematischen Beziehungen von parallelen Manipulatoren nur selten eingesetzt. Die *Denavit-Hartenberg* Notation selbst wird hingegen in allen hier diskutierten Methoden verwendet.

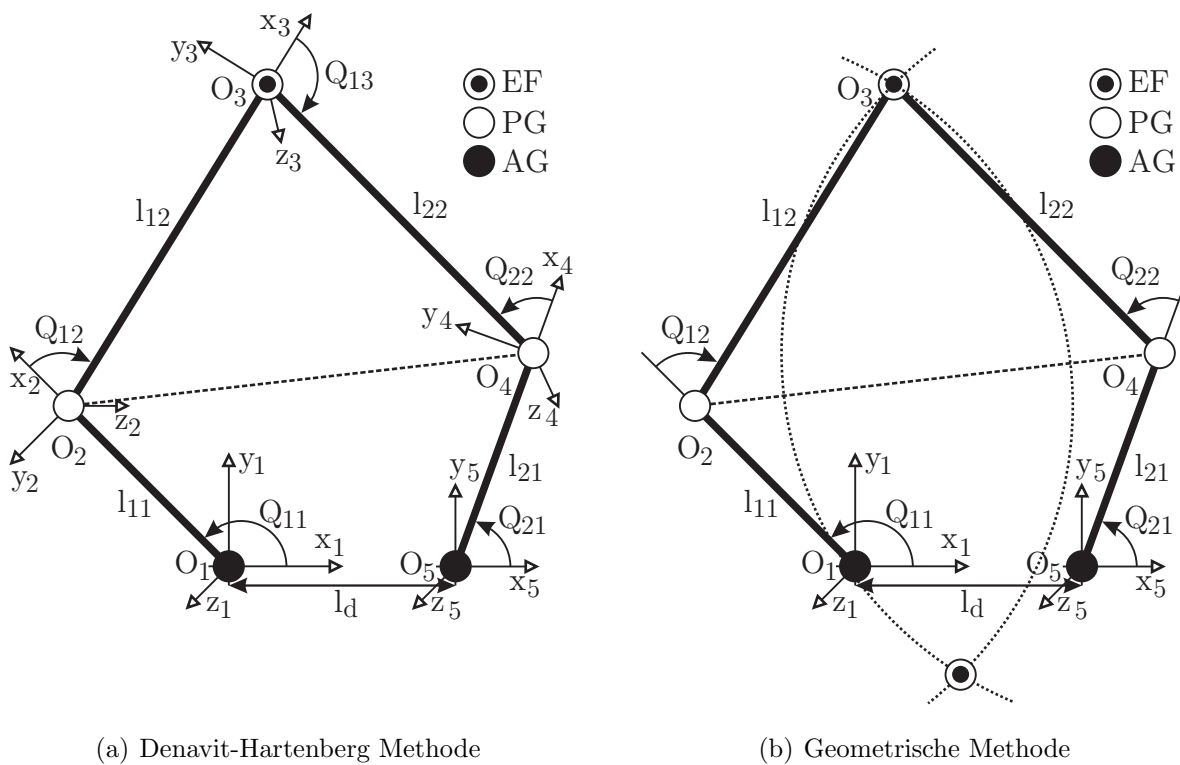


Bild 3.1: Herleitung der kinematischen Beziehungen

In Bild 3.1(a) sind die Elemente des parallelen Manipulators FÜNFGELENK schematisch dargestellt. Dabei bezeichnen „AG“ aktive Gelenke, „PG“ passive Gelenke und „EF“ den Endeffektor in der Form eines passiven Gelenkes. Die aktiven Gelenke sind über die Antriebe

beeinflussbar. Die passiven Gelenke besitzen hingegen keinen Antrieb. Sie dienen der Übertragung der Bewegungen und der Kräfte. Alle Gelenke verfügen über einen rotatorischen Freiheitsgrad und werden durch den Winkel Q_{ij} beschrieben, wobei der erste Index i die Nummer der Führungskette und der zweite Index j die Nummer des Elementes bezeichnet. Die Entfernung zwischen den beiden Antrieben ist durch l_d und die Länge der Arme durch l_{ij} gekennzeichnet. Jedem Gelenk wird ein O_j Koordinatensystem zugeordnet. Ähnlich wie bei den seriellen Manipulatoren sind die Transformationen zwischen den jeweiligen Koordinatensystemen angegeben, eine Transformation für jede unabhängige geschlossene kinematische Kette. In diesem Fall besitzt der Manipulator nur eine einzige geschlossene Kette und die Gleichung kann wie folgt geschrieben werden,

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{{}^1T_1}} &= \underline{\underline{{}^2T_1}} \cdot \underline{\underline{{}^3T_2}} \cdot \underline{\underline{{}^4T_3}} \cdot \underline{\underline{{}^5T_4}} \cdot \underline{\underline{{}^1T_5}} \\
 &= (Rot_{z,Q_{11}} Trans_{x,l_{11}}) \cdot (Rot_{z,Q_{12}} Trans_{x,l_{12}}) \cdot \\
 &\quad (Rot_{z,Q_{13}} Trans_{x,l_{22}}) \cdot (Rot_{z,\pi-Q_{22}} Trans_{x,-l_{21}}) \cdot \\
 &\quad (Rot_{z,-Q_{21}} Trans_{x,-l_d}) \equiv \underline{\underline{E}} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei *Rot* und *Trans* entsprechend die homogenen Rotations- und Translationsmatrizen nach der *Denavit-Hartenberg* Notation bezeichnen [121]. Die daraus resultierende homogene Transformationsmatrix gleicht einer Einheitsmatrix $\underline{\underline{E}}$, da diese Transformation einen geschlossenen Vektorzug beschreibt. Sie beginnt und endet in demselben Referenzsystem bei gleicher Orientierung und Lage. Die Rotationsmatrix in $\underline{\underline{{}^1T_1}}$ gemäß der Gleichung (2.60) ist dabei gleich $\underline{\underline{E}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und der Lagevektor in $\underline{\underline{{}^1T_1}}$ gleich $\underline{0} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Um die Endeffektorposition zu berechnen, müssen nicht nur die zwei redundanten Winkel der passiven Gelenke (Q_{12} und Q_{22}), sondern auch der Winkel Q_{13} am Endeffektor ermittelt werden. Ein nichtlineares Gleichungssystem muss somit gelöst werden, bei dem die gesuchten Größen die Argumente der trigonometrischen Funktionen sind. Schon dieses einfache Beispiel zeigt die Komplikationen, welche bei dieser Methode auftreten. Die Lösung des kinematischen Problems wird bei der Existenz mehrerer geschlossener kinematischer Ketten noch schwieriger, was den Arbeitsaufwand deutlich erhöht.

3.2.2 Geometrische Methode

Diese Methode wird am häufigsten bei der Herleitung der kinematischen Beziehungen von parallelen Manipulatoren eingesetzt [58, 84, 135, 136]. In dieser Methode werden die Vektorgleichungen für jede kinematische Kette zwischen dem Ursprung des globalen Koordinatensystems und dem Anschlusspunkt am Endeffektor aufgestellt. Es wird angenommen, dass

der Ursprung des globalen Koordinatensystems mit dem Referenzsystem eines der Antriebe übereinstimmt, was einen Teil der Gleichungen vereinfacht. In Bild 3.1(b) ist die Struktur des Manipulators zusammen mit den verwendeten Symbolen dargestellt. Die Symbole O_i bezeichnen hier die Punkte im Raum bzw. auf der Ebene. Für die zwei Führungsketten der Roboterstruktur des FÜNFGELENKES können zwei Vektorgleichungen formuliert werden

$$\underline{O_{13}} = \underline{O_{12}} + \underline{O_{23}}, \quad (3.2)$$

$$\underline{O_{13}} = \underline{O_{15}} + \underline{O_{54}} + \underline{O_{43}}. \quad (3.3)$$

Die Gleichung (3.2) für eine der Führungsketten wird in x,y -Koordinaten aufgeschrieben und so umgeformt, dass die Ausdrücke für die Winkel der passiven Gelenke nur auf einer Seite der Gleichung auftreten

$$(x_3 - x_2) = l_{12} \cos(Q_{11} + Q_{12}), \quad (3.4)$$

$$(y_3 - y_2) = l_{12} \sin(Q_{11} + Q_{12}), \quad (3.5)$$

mit den Koordinaten

$$\underline{O_{12}} : \begin{cases} x_2 = x_1 + l_{11} \cos(Q_{11}) \\ y_2 = y_1 + l_{11} \sin(Q_{11}) \end{cases}, \quad \underline{O_{54}} : \begin{cases} x_4 = x_5 + l_{21} \cos(Q_{21}) \\ y_4 = y_5 + l_{21} \sin(Q_{21}) \end{cases}, \quad (3.6)$$

wobei $[x_1 \ y_1]^T = [0 \ 0]^T$ und $[x_5 \ y_5]^T = [l_d \ 0]^T$ sind. Durch Quadrierung der beiden Seiten der Gleichungen (3.4) und (3.5) und anschließende Addition wird die Abhängigkeit von dem Winkel Q_{12} des passiven Gelenkes 0_2 eliminiert. Die so gewonnene Gleichung hat die Form einer Kreisgleichung. Derselben Transformation wird auch die Gleichung (3.3) unterzogen, woraus sich folgendes Gleichungssystem ergibt

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = l_{12}^2, \quad (3.7)$$

$$(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 = l_{22}^2. \quad (3.8)$$

Die Auflösung der beiden Gleichungen (3.7) und (3.8) führt zu folgender Form

$$x_3^2 + y_3^2 + a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13} = 0, \quad (3.9)$$

$$x_3^2 + y_3^2 + a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23} = 0. \quad (3.10)$$

Die Subtraktion der Gleichung (3.10) von (3.9) führt zu einer linearen Gleichung. Die Koordinate x_3 kann in Abhängigkeit von y_3 ausgedrückt werden

$$x_3 = \frac{a_{23} - a_{13}}{a_{11} - a_{21}} + \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}} y_3. \quad (3.11)$$

Durch Substitution der Gleichung (3.11) in (3.9) und anschließende Auflösung nach y_3 ergibt sich eine quadratische Gleichung, welche zwei Lösungen besitzt. Die Existenz zweier Lösungen ließ schon das Gleichungssystem (3.7) und (3.8) vermuten, das aus der Sicht der Geometrie einer Suche nach zwei Schnittpunkten der beiden Kreisen entspricht [135]. An einem der beiden Schnittpunkte befindet sich der Endeffektor während der andere symmetrisch zur virtuellen Linie, welche die passiven Gelenke O_2 und O_4 verbindet, liegt. Diese Situation wird in Bild 3.1(b) gezeigt, wobei die beiden Kreise durch punktierte Linien dargestellt sind. Um die Position des Endeffektors bestimmen zu können, müssen aus diesem Grund zusätzliche Bedingungen eingeführt werden. Dabei muss auch beachtet werden, dass sich die zweite Lösung dieser Gleichung ebenfalls im regulären Arbeitsraum des Manipulators befinden kann. Deswegen kann die gesamte Lösung des DKP's, trotz der für sich genommen relativ einfachen Herleitung der kinematischen Gleichungen, kompliziert sein. Bei manchen parallelen Manipulatoren, wie z.B. beim Manipulator PARMA in Bild 1.1(d), führt diese Methode dennoch zu einer eindeutigen Lösung der direkten Kinematik, ohne dass zusätzliche Bedingungen eingeführt werden [58]. Wegen der starken Unterschiede der parallelen Architekturen hängt die Verwendbarkeit jeder Methode von der Konstruktion und dem Typ des parallelen Manipulators ab, wie schon am Anfang dieses Kapitels erwähnt.

3.2.3 Trigonometrische Methode

Die vorgestellten Methoden führten trotz der einfachen Struktur des parallelen Manipulators FÜNFGELENK zu komplexen Gleichungen. Im Rahmen der geometrischen Methode wurden außerdem die Winkel Q_{12} und Q_{22} der passiven Gelenke nicht berechnet. Die Kenntnis dieser Winkel ist aber in vielen Fällen notwendig, da die Endeffektorposition nicht immer nur in Abhängigkeit von den Winkeln der aktiven Gelenke formuliert werden kann. Die geometrische Methode verlangte dabei die Einführung zusätzlicher Entscheidungskriterien, um die Endeffektorlage eindeutig bestimmen zu können. Diese Gründe sowie auch die Analyse der in der Literatur vorgestellten Methoden gaben den Anstoß zu der Entwicklung eines neuen Verfahrens [122].

Die Herleitung der kinematischen Beziehungen beginnt mit der Aufstellung der Bedingungen, welche den Arbeitsraum des Manipulators definieren. Die Bestimmung dieser Bedingungen

und ihre Bedeutung wird im Folgenden genauer erläutert. Die erste Bedingung ist mit der Singularität der Jacobimatrix verbunden und begrenzt den Winkelbereich der passiven Gelenke

$$I : \begin{cases} Q_{12} \in (-\pi, 0), \\ Q_{22} \in (0, \pi). \end{cases} \quad (3.12)$$

Das impliziert, dass sich die „Ellbogen“ der kinematischen Ketten ständig auf einer Seite der virtuellen Linie befinden, welche den Endeffektor mit dem jeweiligen Antrieb verbindet - das bekannte Problem „Ellbogen oben“ bzw. „Ellbogen unten“. Diese Anordnung ist in Bild 3.3 zu sehen. Die zweite Bedingung besagt, dass die Antriebe nicht durchdrehen können

$$II : \begin{cases} Q_{11} \in (0, 2\pi), \\ Q_{21} \in (-\pi, \pi). \end{cases} \quad (3.13)$$

Die Geometrie der Elemente, wie z.B. der Durchmesser der Antriebe oder die Breite der Oberarme l_{12} und l_{22} , welche die Bedingungen (3.12) und (3.13), im Rahmen einer Kollisionsvermeidung, verschärfen, wird erst bei der Analyse des Arbeitsraumes genauer besprochen. Die Anordnung der Symbole und ihre Bedeutung kann Bild 3.2 entnommen werden. Ergänzend

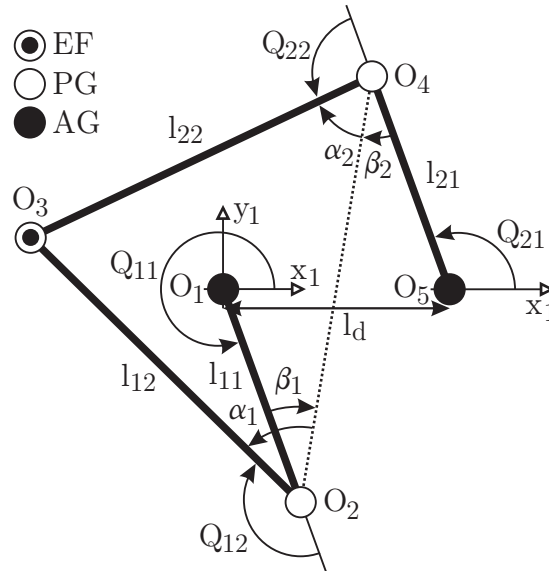


Bild 3.2: Kinematische Beziehungen bei der trigonometrischen Methode

werden, um Missverständnisse zu vermeiden, folgende Bezeichnungen eingeführt

$$\begin{aligned}
[x_1 \ y_1]^T &= [0 \ 0]^T, & [x_5 \ y_5]^T &= [l_d \ 0]^T, \\
\|O_{14}\| &= \sqrt{x_4^2 + y_4^2}, \\
\|O_{24}\| &= \sqrt{(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2}, \\
\|O_{25}\| &= \sqrt{(x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Die neue Methode basiert auf der Beobachtung, dass der Endeffektor des Manipulators die virtuelle Linie zwischen den passiven Gelenken O_2 und O_4 , als Punktlinie in Bild 3.2 eingezeichnet, oder eine virtuelle Ebene, wie im Falle des parallelen Manipulators TRIGLIDE in Bild 1.1(b), nicht passieren darf. Diese Linie markiert eine weitere Singularität der Jacobimatrix. Beim Durchfahren dieser Linie müsste eine andere Gleichung der Kinematik benutzt werden, die aber ebenfalls mit dieser Methode hergeleitet werden kann [44]. Die zu lösende Aufgabe ist die Bestimmung der Winkel zwischen den Armen des Roboters, die mit den passiven Gelenken verbunden sind, und der eingeführten virtuellen Linie. Aus diesen lassen sich dann die Winkel der passiven Gelenke und letztendlich die Endeffektorlage ermitteln. Zu diesem Zweck werden folgende Hilfswinkel berechnet (siehe Bild 3.2).

$$\angle O_{14} = \arcsin\left(\frac{y_4}{\|O_{14}\|}\right), \tag{3.15}$$

$$\angle O_{25} = \pi - \arcsin\left(\frac{y_2}{\|O_{25}\|}\right), \tag{3.16}$$

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{l_{12}^2 + \|O_{24}\|^2 - l_{22}^2}{2l_{12}\|O_{24}\|}\right), \tag{3.17}$$

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{l_{22}^2 + \|O_{24}\|^2 - l_{12}^2}{2l_{22}\|O_{24}\|}\right), \tag{3.18}$$

$$\beta_1 = \arccos\left(\frac{l_{11}^2 + \|O_{24}\|^2 - \|O_{14}\|^2}{2l_{11}\|O_{24}\|}\right), \tag{3.19}$$

$$\beta_2 = \arccos\left(\frac{l_{21}^2 + \|O_{24}\|^2 - \|O_{25}\|^2}{2l_{21}\|O_{24}\|}\right). \tag{3.20}$$

Die Winkel der passiven Gelenke können als Kombination der Hilfswinkel (3.15)-(3.20) berechnet werden

$$Q_{12} = -(\pi - (\alpha_1 + \text{sign}(\pi - Q_{11} + \angle O_{14})\beta_1)), \tag{3.21}$$

$$Q_{22} = (\pi - (\alpha_2 + \text{sign}(Q_{21} + \angle O_{25})\beta_2)). \tag{3.22}$$

Mit Hilfe der sign-Funktion werden die Winkel $\angle O_{412}$ und $\angle O_{452}$, welche die Information

über die Lage des Roboters beinhalten, analysiert. Das Ergebniss führt dann zur Addition oder Subtraktion der Hilfswinkel α_i und β_i . Die Berechnung der Endeffektorlage kann dann auf der Basis eines der Winkel der passiven Gelenke erfolgen, hier mit dem Winkel Q_{12} :

$$\begin{cases} x_3 = l_{11} \cos(Q_{11}) + l_{12} \cos(Q_{11} + Q_{12}), \\ y_3 = l_{11} \sin(Q_{11}) + l_{12} \sin(Q_{11} + Q_{12}). \end{cases} \quad (3.23)$$

Wenn sich der parallele Manipulator in seinem Arbeitsraum befindet und dafür gesorgt wird, dass er diesen Arbeitsraum nicht verlässt, was meistens der Fall ist, wird mit Hilfe der Gleichungen (3.15)-(3.23) jede Lage des Endeffektors korrekt ermittelt [29]. Es existieren aber Konfigurationen, welche die gestellten Bedingungen erfüllen und trotzdem zu einer unzulässigen Pose des Roboters führen werden. Diese Fälle werden bei der Bestimmung des Arbeitsraumes, im Abschnitt 3.4, besprochen.

Die Berechnung der passiven Winkel (3.21) und (3.22) verlangte die Analyse der Winkelbeziehungen an jedem der passiven Gelenke, was mit einem gewissen Arbeitsaufwand verbunden ist. Bei der Kenntnis der Endeffektorlage könnte nach der Berechnung eines der Winkel der andere Winkel aus den einfacheren kinematischen Beziehungen, wie in Gleichung (3.31) bzw. (3.32), ermittelt werden. Das kann aber eine der Bedingungen in (3.12) oder (3.13) außer Kraft setzen, was zu unzulässigen Lösungen führen wird. Aus diesem Grund sollten sämtliche Vereinfachungen bei der Herleitung der Beziehungen sorgfältig durchgeführt oder gar vermieden werden.

3.3 Inverse Kinematik

Wie schon am Anfang dieses Kapitels erwähnt, ist die Lösung des inversen kinematischen Problems (IKP's) sogar im Vergleich mit den seriellen Kinematiken weniger kompliziert [84, 136]. Die Lösung des IKP's basiert auf den gleichen Bedingungen (3.12) und (3.13), die schon zur Herleitung der direkten Kinematik genutzt wurden. Die Bedingung (3.12) besagt, dass sich die passiven Gelenke O_2 und O_4 immer auf einer Seite der virtuellen Linie zwischen dem Endeffektor und dem jeweiligen Antrieb befinden. Diese Situation ist zusammen mit den dazu gehörenden Symbolen in Bild 3.3 dargestellt. Um Missverständnisse zu vermeiden, werden folgende Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \|O_{31}\| &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}, \\ \|O_{35}\| &= \sqrt{(x_3 - x_5)^2 + (y_3 - y_5)^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

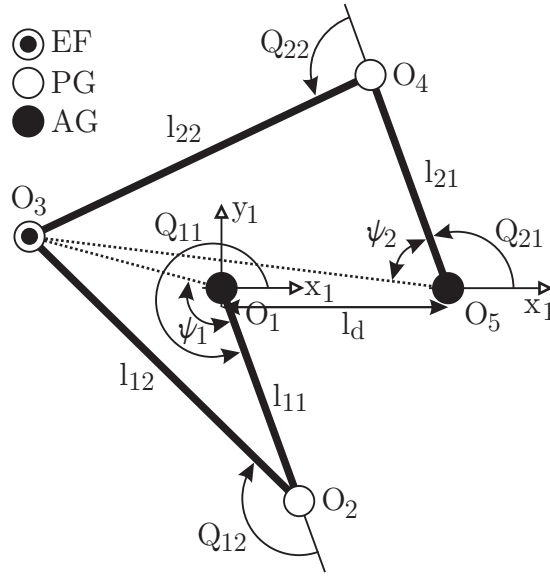


Bild 3.3: Herleitung der inversen Kinematik

und Hilfswinkel

$$\angle O_{31} = \arctan 2(y_3, x_3) \in (-\pi, \pi), \quad (3.25)$$

$$\angle O_{35} = \arctan 2(y_3, x_3 - l_d) \in (-\pi, \pi), \quad (3.26)$$

$$\psi_1 = \arccos \left(\frac{\|O_{31}\|^2 + l_{11}^2 - l_{12}^2}{2l_{11}\|O_{31}\|} \right), \quad (3.27)$$

$$\psi_2 = \arccos \left(\frac{\|O_{35}\|^2 + l_{21}^2 - l_{22}^2}{2l_{21}\|O_{35}\|} \right) \quad (3.28)$$

eingeführt. Die Berechnung der Winkel der aktiven Gelenke

$$Q_{11} = \angle O_{31} + \psi_1, \quad (3.29)$$

$$Q_{21} = \angle O_{35} - \psi_2 \quad (3.30)$$

und passiven Gelenke

$$Q_{12} = - \left(\pi - \arccos \left(\frac{l_{11}^2 + l_{12}^2 - \|O_{31}\|^2}{2l_{11}l_{12}} \right) \right), \quad (3.31)$$

$$Q_{22} = \left(\pi - \arccos \left(\frac{l_{21}^2 + l_{22}^2 - \|O_{35}\|^2}{2l_{21}l_{22}} \right) \right) \quad (3.32)$$

stellt eine triviale Aufgabe dar. Die berechneten Winkel der aktiven Gelenke müssen noch,

falls nötig, gemäß der Bedingung (3.13) angepasst werden

$$\text{if}(Q_{11} < 0) \quad Q_{11} = 2\pi + Q_{11}; \quad \text{if}(Q_{11} > 2\pi) \quad Q_{11} = Q_{11} - 2\pi, \quad (3.33)$$

$$\text{if}(Q_{21} < -\pi) \quad Q_{21} = 2\pi + Q_{21}; \quad \text{if}(Q_{21} > \pi) \quad Q_{21} = Q_{21} - 2\pi. \quad (3.34)$$

Wenn ein Punkt zum Arbeitsraum des parallelen Manipulators gehört, liefern die Gleichungen (3.29)-(3.34) immer korrekte Winkelwerte für die aktiven und passiven Gelenke. Auf Grund ihrer Übersichtlichkeit können die nötigen Bedingungen in diese Gleichungen sehr einfach eingebaut werden, was bei komplexen Architekturen von großem Vorteil ist.

3.4 Bestimmung des Arbeitsraumes

Der Arbeitsraum jedes Manipulators wird im Prinzip durch alle geometrisch realisierbaren Konfigurationen des Roboters definiert. Nicht alle davon können oder sollen wirklich erreicht werden. Eine bestimmte Menge der Konfigurationen führt zu Zuständen, in denen der Manipulator nicht steuerbar bzw. kontrollierbar ist. Man spricht von den singulären Posen, die aus der Singularität der Jacobimatrix resultieren [14, 84, 136]. Im Vergleich zu den seriellen Robotern können solche Posen bei den parallelen Manipulatoren nicht nur am Rande, sondern auch im Inneren des Arbeitsraumes auftreten, was prinzipiell zu einer Verkleinerung des Arbeitsraumes führt. Die Begrenzung durch die Singularitäten der Jacobimatrix im Inneren des Arbeitsraumes kann mit Hilfe geeigneter Steuerungs- und Regelungsstrategien beherrscht werden. So kann ein möglichst großer Arbeitsraum des Manipulators gewährleistet werden [18, 19, 20, 41, 44, 72, 141]. Eine andere Menge der Konfigurationen kann auf Grund der Roboterbauweise nicht erreicht werden, da diese Posen zu Kollisionen zwischen einzelnen Elementen oder den Führungsketten führen würden. In diesem Sinne ist der Arbeitsraum des Manipulators ein Raum, in dem sich der Endeffektor des Roboters befindet und der durch die Singularitäten der Jacobimatrix und die Bauweise der Struktur definiert ist. Durch eine geeignete Wahl der Abmessungen der Elemente können manche der Singularitäten im Inneren des Arbeitsraumes eliminiert werden [56, 72].

Die genauere Bestimmung der Bedingungen, welche den Arbeitsraum definieren, spielt eine sehr wichtige Rolle, sowohl bei der Analyse der Eigenschaften, als auch im Betrieb des Manipulators. Bei der Analyse werden zumeist alle möglichen Kombinationen der Positionen/Winkelstellungen der Antriebe angegeben und für diese die gesuchten Indizes berechnet. Deswegen müssen alle unzulässigen Konfigurationen schon durch die Gleichungen der Kinetik eliminiert werden, damit falsche Ergebnisse bei der Analyse ausgeschlossen werden.

Im Betrieb werden software- und hardwareseitige Maßnahmen getroffen, um das Verlassen des Arbeitsraumes durch den Manipulator zu vermeiden. Das Verlassen des Arbeitsraumes kann äußerst gefährlich sein und zur Zerstörung der Struktur selbst und der Umgebung des Manipulators führen, sowie zu Verletzungen bei sich dort aufgehaltenen Personen. Zu den softwareseitigen Methoden gehören Verfahren, die unter anderem auf der Beobachtung der Jacobimatrix (ihrer kontinuierlichen Analyse) basieren [14, 84]. Diese Methoden gewährleisten aber keine hohe Sicherheit, da sie bei einem Systemabsturz des Manipulators nicht mehr wirksam sind. Aus diesem Grund werden sehr oft hardwareseitige Maßnahmen getroffen, welche die Antriebe bei einem Überschreiten der eingestellten mechanischen Markierungen abschalten oder abbremesen sollen [29]. Die Kenntnis aller Bedingungen, die den Arbeitsraum begrenzen, ist somit eine Grundvoraussetzung für die korrekte Analyse der Robotereigenschaften und einen sicheren Betrieb des Manipulators.

3.4.1 Singularitäten der Jacobimatrix

Die Konfigurationen, in denen die Jacobimatrix des Manipulators singulär wird, sollen entweder vermieden oder „intelligent“ durchschlagen werden, da in solchen Konfigurationen die Roboterstruktur zerstört werden kann. Die singulären Posen trennen damit die Sub-Arbeitsräume, die durch das Durchschlagen verbunden werden können. Die Singularitäten der Jacobimatrix werden am Beispiel des planaren parallelen Manipulators FÜNFGELENK besprochen. Es wird auch gezeigt, wie die im Abschnitt 3.2.3 eingeführten Bedingungen aufgestellt wurden.

Die Jacobimatrix für den ebenen parallelen Manipulator FÜNFGELENK kann nach der Methode des Vektorzuges der Geschwindigkeiten aus den Gleichungen (3.9) und (3.10) der geschlossenen kinematischen Kette hergeleitet werden [136]. Es wird angenommen, dass der Manipulator so viele Antriebe wie Freiheitsgrade besitzt. Dabei bezeichnet der Vektor $\underline{x} = [x_3 \ y_3] \in \mathbb{R}^2$ die Endeffektorlage und der Vektor $\underline{Q}_a = [Q_{11} \ Q_{21}] \in \mathbb{R}^2$ die Winkel der Antriebe. Die Gleichungen (3.9) und (3.10) können in folgender Form geschrieben werden

$$\underline{h}(\underline{x}, \underline{Q}_a) = \underline{0} : \begin{cases} h_1(\underline{x}, \underline{Q}_a) = 0, \\ h_2(\underline{x}, \underline{Q}_a) = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Nach der zeitlichen Ableitung der Gleichung (3.35) und Anordnung der Terme kann die Be-

ziehung zwischen den Endeffektor- und Antriebsgeschwindigkeiten

$$\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} = -\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{Q}_a} \dot{\underline{Q}}_a \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{G}}_x \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{G}}_q \dot{\underline{Q}}_a \quad (3.36)$$

und in ihren Komponenten

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} l_{12} \cos(Q_{11} + Q_{12}) & l_{12} \sin(Q_{11} + Q_{12}) \\ l_{22} \cos(Q_{21} + Q_{22}) & l_{22} \sin(Q_{21} + Q_{22}) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_{11}l_{12} \sin(Q_{12}) & 0 \\ 0 & l_{21}l_{22} \sin(Q_{22}) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11} \\ \dot{Q}_{21} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

angegeben werden. Die Jacobimatrix des parallelen Manipulators setzt sich damit aus der Jacobimatrix $\underline{\underline{G}}_q$ der inversen und der Jacobimatrix $\underline{\underline{G}}_x$ der direkten Kinematik zusammen

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}_q^{-1} \underline{\underline{G}}_x. \quad (3.38)$$

Diese Matrix wird singulär, wenn eine der Jacobimatrizen oder beide gleichzeitig singulär werden. So kann bei dieser Art von Robotern zwischen drei Arten von Singularitäten unterschieden werden. Die Singularitäten der inversen Kinematik treten auf, wenn

$$\det(\underline{\underline{G}}_q) = 0. \quad (3.39)$$

Diese Bedingung ist für den Manipulator FÜNFGELENK, gemäß der Gleichung (3.37), erfüllt, wenn eine oder beide Winkel der passiven Gelenke entweder den Wert von 0 rad oder $\pm\pi \text{ rad}$ annehmen. Das entspricht der bereits eingeführten Bedingung (3.12). In Bild 3.4(a) ist eine solche Konfiguration mit den Winkeln $Q_{12} = Q_{22} = 0 \text{ rad}$ und in Bild 3.4(b) mit den Winkeln $Q_{12} = -\pi$, $Q_{22} = \pi \text{ rad}$ dargestellt. Die zweite Konfiguration kann nur erreicht werden, wenn die beiden oberen Arme nicht in der gleichen Ebene wie die Antriebe und die zwei Kurbeln liegen. In solchen Posen verliert der Manipulator einen oder mehrere Freiheitsgrade und ist dadurch nicht mehr in der Lage, den externen Kräften am Endeffektor entgegen zu wirken, was zur Zerstörung der Struktur führen kann. Die Singularitäten der direkten Kinematik können aus der Bedingung

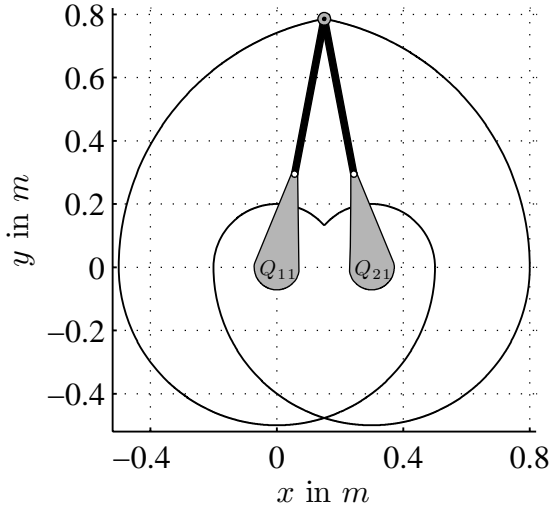
$$\det(\underline{\underline{G}}_x) = 0 \quad (3.40)$$

ermittelt werden, was gemäß der Gleichung (3.37) impliziert

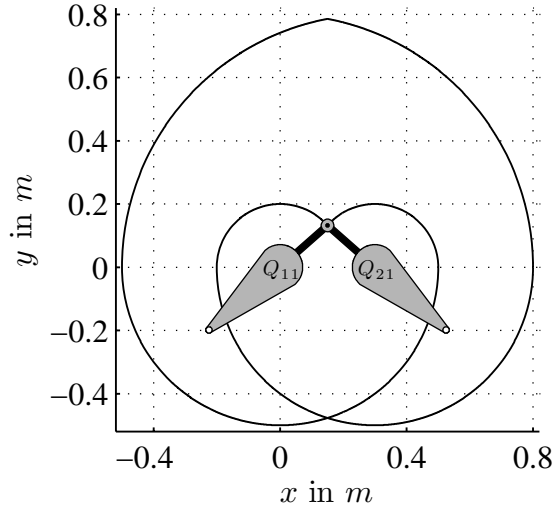
$$Q_{11} + Q_{12} - Q_{21} - Q_{22} = 0, \quad (3.41)$$

oder

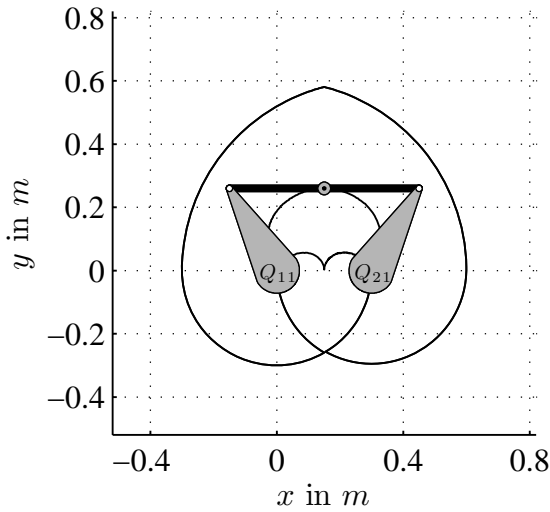
$$Q_{11} + Q_{12} - Q_{21} - Q_{22} = \pm\pi. \quad (3.42)$$



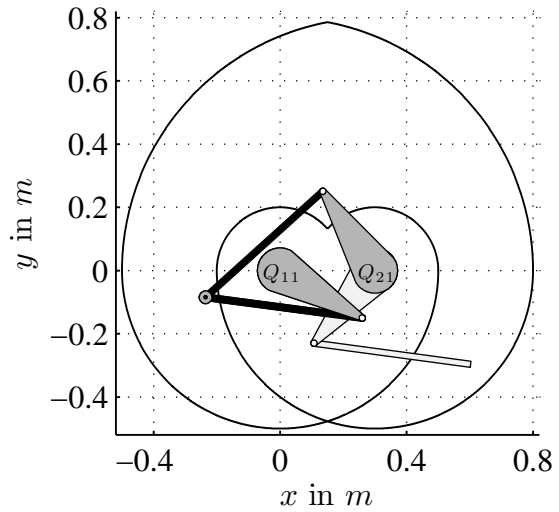
(a) Singularität der inversen Kinematik



(b) Singularität der inversen Kinematik



(c) Singularität der direkten Kinematik



(d) Inkonsistenz der Bedingungen

Bild 3.4: Konfigurationen des parallelen Manipulators FÜNFGELENK

Bei den geometrischen Abmessungen des FÜNFGELENKES von $l_{12} = l_{22} = 0,5m$ und $l_d = l_{11} = l_{21} = 0,3m$ ist die Bedingung

$$l_d + l_{11} + l_{21} \leq l_{12} + l_{22} \quad (3.43)$$

erfüllt und es treten keine Singularitäten der direkten Kinematik auf. Das entspricht der

bereits erwähnten Situation, in der schon durch die Konstruktion des Manipulators gewisse Arten von Singularitäten vermieden werden [56]. In Bild 3.4(c) ist eine solche Pose bei der veränderten Geometrie des Manipulators $l_d = l_{12} = l_{22} = l_{11} = l_{21} = 0,3m$ dargestellt. In dieser singulären Pose können die Antriebsmomente die Konfiguration des Roboters nicht verändern und es kann ebenfalls zur Zerstörung der Struktur, zum Zerquetschen oder Zerreißen der Elemente, kommen. In solchen Posen gewinnt der Manipulator zusätzliche Freiheitsgrade und verliert dadurch seine Steifigkeit. Die gemischten Singularitäten der inversen und direkten Kinematik treten bei dem hier analysierten Manipulator nicht auf. Sie ergeben sich nur bei bestimmten Manipulatoren mit speziellen Architekturen [136].

Die Analyse der Singularitäten für das FÜNFGELENK ergab die Bedingung *I* in der Gleichung (3.12) für die Winkel der passiven Gelenke. Zur Ergänzung wurde noch die formale Bedingung *II* in der Gleichung (3.13) für die Winkel der aktiven Gelenke eingeführt, welche die Bereiche dieser Winkel definierte. Sie resultierte aus der Geometrie des Roboters und Anordnung der Koordinatensysteme. Es ist jedoch fraglich, ob diese zwei Bedingungen, zusammen mit den Gleichungen der Kinematik, eindeutige Ergebnisse für eine beliebige Kombination der Antriebswinkel liefern und ob alle unzulässigen Lösungen ausgeschlossen werden. Um diese Frage zu klären und die Eindeutigkeit und Richtigkeit der Ergebnisse zu überprüfen, wurden zur Analyse der Gleichungen der Kinematik und der eingeführten Bedingungen zwei Methoden vorgeschlagen, eine graphische und eine analytische. [122].

3.4.2 Graphische Methode

Diese Methode basiert auf der folgenden Überlegung:

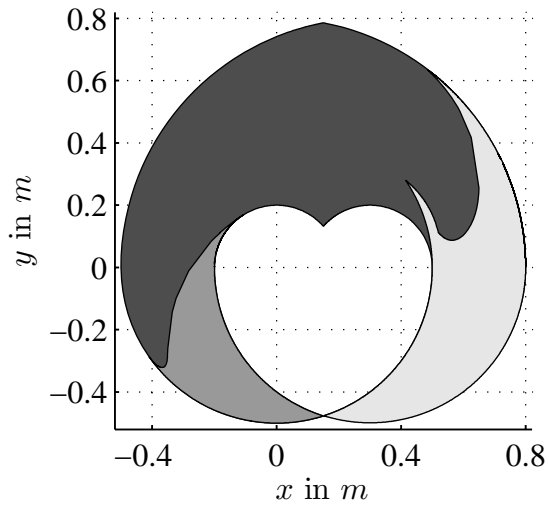
Der Arbeitsraum eines Manipulators bildet in allen unabhängigen Koordinatenmengen/Konfigurationsräumen eine geschlossene Ebene oder einen geschlossenen Raum.

Begründung:

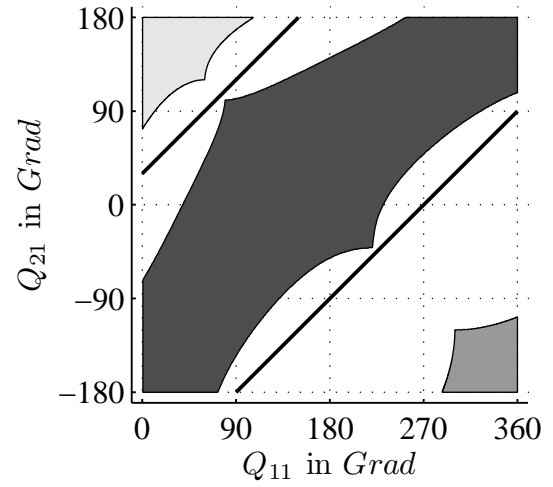
Zwei willkürliche Punkte im kartesischen Arbeitsraum des Manipulators können immer durch einen kontinuierlichen geometrischen Pfad verbunden werden. Durchschlagen der Singularitäten bezieht sich dabei auf die Verbindung von zwei oder mehreren Sub-Arbeitsräumen zu einem Arbeitsraum und ist von dieser Überlegung nicht ausgeschlossen, wird aber zunächst nicht berücksichtigt [19]. Bei der Annahme, dass die Abbildung zwischen den Konfigurationsräumen, der Menge der Koordinaten der aktiven oder passiven Gelenke und dem kartesischen Arbeitsraum, eine stetige, eindeutige und reziproke Abbildung ist, muss auch die Trajektorie

in jedem Konfigurationsraum kontinuierlich sein. Dabei sind die Gleichungen der direkten und inversen Kinematik zusammen mit ihren Bedingungen gemeint, was die Eindeutigkeit der Lösungen gewährleisten soll. Diese Abbildung ist mindestens zweimal differenzierbar, da in jeder Repräsentation die Geschwindigkeit und Beschleunigung angegeben werden können. Eine solche Abbildung wird als *Diffeomorphismus*, wenn beide Räume der gleichen Dimension sind, oder als *Homöomorphismus*, wenn die Dimensionen unterschiedlich sind, bezeichnet. Sind diese Annahmen nicht erfüllt, so handelt es sich nur um eine glatte Abbildung zwischen den Konfigurationsräumen. Die Kontinuität der Trajektorie impliziert eine geschlossene Form des Arbeitsraumes in jedem Konfigurationsraum, so dass keine isolierten Bereiche existieren dürfen. Die Eindeutigkeit der Lösung bedeutet, dass sich die Bereiche in jedem Konfigurationsraum, welche die einzelnen Sub-Arbeitsräume bezeichnen, nicht überlappen dürfen. Dieser Fall ist aber schwer zu erkennen, wenn ein Bereich in dem anderen enthalten ist. Da aber die Arbeitsräume als Punktgitter generiert werden und die Gleichungen der Kinematik vorwiegend nichtlinear sind, kann die Überlappung auf Grund der Unregelmäßigkeiten und der abrupten Dichteänderung der Punktverteilung erkannt werden. In einer der Repräsentationen (kartesischen Koordinaten oder Gelenkkoordinaten) wird so ein Gitter mit äquidistanten Punkten und in der durch die inverse oder direkte Kinematik resultierenden Konfiguration, durch ein Gitter mit variierten Punktabständen dargestellt. Ein weiteres Kriterium zur Beurteilung der Lösung resultiert aus der Bauweise des Roboters. Die parallelen Manipulatoren werden zumeist symmetrisch gebaut, was sich in der Symmetrie des Arbeitsraumes widerspiegelt, ein Umstand, der bei der Bestimmung der Bedingungen hilfreich sein kann.

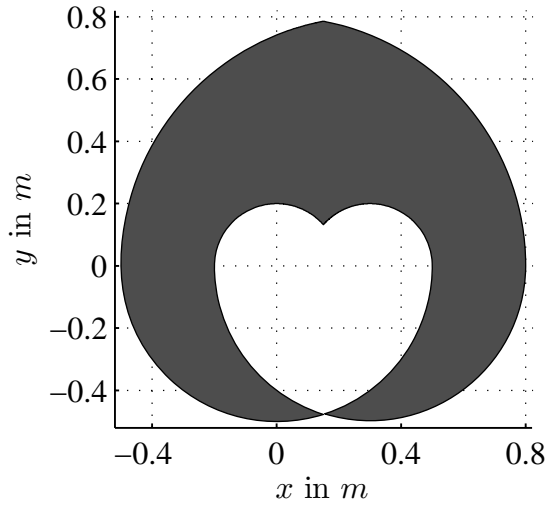
Basierend auf dieser Überlegung wurden die in der trigonometrischen Methode hergeleiteten Gleichungen (3.15)-(3.22) und die Bedingungen (3.12)-(3.13) mit Hilfe dieses Verfahrens analysiert. Da die Bedingungen für die Winkel der passiven Gelenke eindeutig festgelegt worden sind, wurde nur der Konfigurationsraum in den kartesischen und in den Koordinaten der aktiven Gelenke untersucht. Bei der Analyse wurde zusätzlich angenommen, dass die Deformationen der elastischen Roboterelemente vernachlässigbar klein im Vergleich zur Starrkörperbewegung des Roboters sind, wodurch die ganze Konstruktion bei der Generierung des Arbeitsraumes als starr angenommen werden kann. In den Bildern 3.5(a) und 3.5(b) sind die beiden Repräsentationen der Arbeitsräume dargestellt. In Bild 3.5(b) können deutlich zwei getrennte Bereiche erkannt werden, die nicht zu dem Hauptbereich des Arbeitsraumes QQ gehören. Im kartesischen Arbeitsraum XY dagegen, in Bild 3.5(a), befinden sich diese Bereiche im regulären Arbeitsbereich des Roboters, gekennzeichnet durch unterschiedliche Graustufen. Sie sind durch eine alleinige Inspektion des kartesischen Arbeitsraumes sehr schwer zu erkennen und ihre Beseitigung kann sehr kompliziert, wenn nicht unmöglich werden. Die Gleichungen der Kinematik und die dazu gehörigen Bedingungen erlauben diese



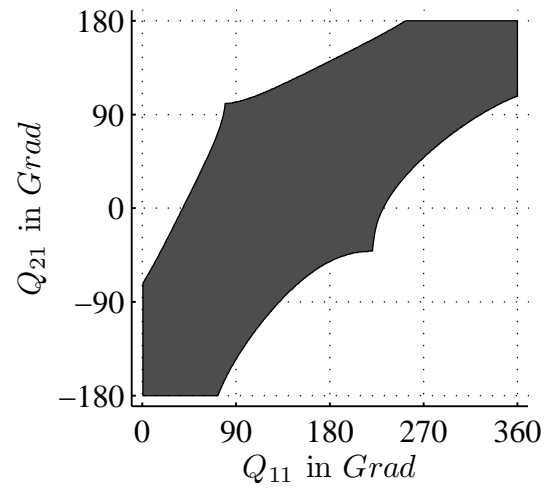
(a) Arbeitsraum XY (I und II)



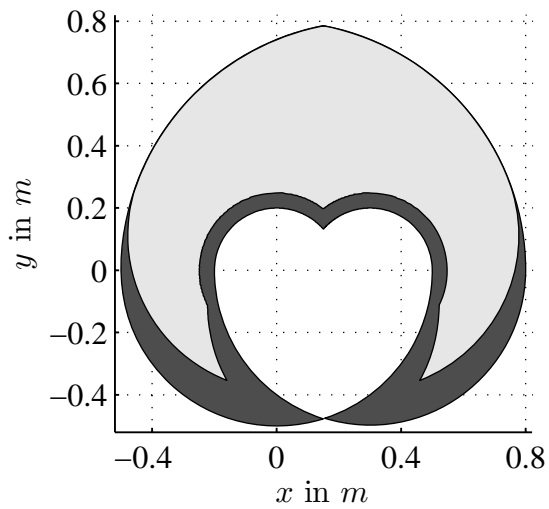
(b) Arbeitsraum QQ (I und II)



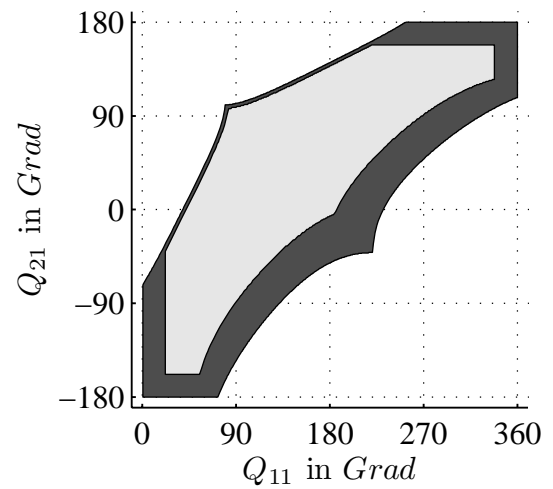
(c) Arbeitsraum XY (I, II und III)



(d) Arbeitsraum QQ (I, II und III)



(e) Arbeitsraum XY (I', II' und III)



(f) Arbeitsraum QQ (I', II' und III)

Bild 3.5: Definition des Arbeitsraumes des FÜNFGELENKES

falschen Werte, was auf die Unvollständigkeit der Bedingungen hindeutet. In Bild 3.4(d) ist eine solche Pose des Roboters gezeigt, die zu den unzulässigen Lösungen gehört. Die linke Führungskette, mit dem Antrieb Q_{11} zeigt in den linken unteren Teil des Arbeitsraumes XY . Die rechte Führungskette mit dem Antrieb Q_{21} , als Kontur dargestellt, zeigt auf den rechten unteren Teil. Die beiden Bedingungen (3.12)-(3.13) sind erfüllt. Da die Berechnung der Endeffektorlage meistens nur auf der Basis einer Führungskette (3.23) erfolgt, wird diese unzulässige und nicht realisierbare Konfiguration nicht eliminiert. Eine Analyse der Roboteigenschaften für diese Winkelwerte würde natürlich zu einem Fehler führen. Während der Regelung dagegen würde der Regler versuchen, die falsche Position mit dem Antrieb Q_{21} zu erreichen, was die Zerstörung der Roboterstruktur zur Folge hätte. Aus diesen Gründen ist es nötig, noch eine weitere Bedingung einzuführen. Eine Möglichkeit wäre hier die Berechnung der Differenz zwischen der Endeffektorlage/position der beiden Führungsketten, was aber mit zusätzlichem Rechenaufwand verbunden wäre. Die Analyse im Konfigurationsraum der aktiven Gelenke QQ erlaubt hingegen ein bequemes und einfaches Ermitteln dieser Bedingung, was in Bild 3.5(b) mit zwei schwarzen Linien gekennzeichnet ist. Die Bedingung für die Koordinaten der aktiven Gelenke lautet dann

$$III : \begin{cases} Q_{11} - Q_{21} < 270^\circ, \\ Q_{11} - Q_{21} > -30^\circ. \end{cases} \quad (3.44)$$

In den Bildern 3.5(c) und 3.5(d) wurden die Arbeitsräume unter Einwirkung aller drei Bedingungen (3.12), (3.13) und (3.44) generiert. Die Gleichungen der direkten Kinematik liefern eindeutige Lösungen und die unzulässigen Bereiche wurden eliminiert. Die Bedingung (3.44) kann ebenfalls aus den Singularitäten der inversen Kinematik ermittelt werden, da sie eigentlich die Bedingung (3.12) darstellt, welche hier explizit für die Koordinaten der aktiven Gelenke formuliert wurde. Im letzten Schritt müssen noch die geometrischen Abmessungen der Robotererelemente berücksichtigt werden. Bei einem Durchmesser der Kurbeln l_{11} und l_{21} am Antrieb von $2R_{11} = 2R_{21} = 148 \text{ mm}$ und der Breite des Oberarmes l_{12} und l_{22} in der xy -Ebene von $b_{11} = b_{21} = 24 \text{ mm}$ ergibt sich ein Winkel von circa $\gamma \approx 17^\circ$, um den die jeweiligen Winkelbereiche verkleinert werden müssen. Dazu kommt noch ein Sicherheitsabstand zum Rand des Arbeitsraumes, was durch einen Winkel von $\chi = 5^\circ$ ausgedrückt wird. Die Bedingungen (3.12) und (3.13) können somit neu formuliert werden

$$I' : \begin{cases} Q_{12} \in (-\chi, -\pi + (\gamma + \chi)), \\ Q_{22} \in (\chi, \pi - (\gamma + \chi)). \end{cases} \quad (3.45)$$

und

$$II' : \begin{cases} Q_{11} \in (\gamma + \chi, 2\pi - (\gamma + \chi)), \\ Q_{21} \in (\pi - (\gamma + \chi), -\pi + (\gamma + \chi)). \end{cases} \quad (3.46)$$

Das Ergebnis der Arbeitsraumbegrenzung ist in den Bildern 3.5(e) und 3.5(f) dargestellt. Der resultierende Arbeitsraum ist in hellgrau und der theoretische in dunkelgrau gekennzeichnet.

Die graphische Methode zur Überprüfung der Gleichungen der Kinematik ist für Manipulatoren mit zwei oder drei Antrieben geeignet, deren Konfigurationsräume noch übersichtlich in einem Bild dargestellt werden können. Sie unterstützt die Bestimmung des Arbeitsraumes und ermöglicht es zu prüfen, ob alle Bedingungen berücksichtigt wurden. Diese Methode könnte prinzipiell für die nicht-redundanten Manipulatoren mit mehreren Freiheitsgraden eingesetzt werden, um die Lösungsmenge der direkten Kinematik zu überprüfen, da die Lage (ohne Orientierung) des Endeffektors jedes solchen Manipulators immer in drei Dimensionen des *Euklidischen* Raumes dargestellt werden kann. In diesem Sinne kann die Inspektion der Eindeutigkeit der Lösung jedes solchen Manipulators, der besprochenen Überlappung und der Symmetrie der Sub-Bereiche, eigentlich immer durchgeführt werden.

3.4.3 Analytische Methode

Die graphische Methode ermöglicht für den hier analysierten parallelen Manipulator FÜNFGELENK, mit der erfüllten Bedingung (3.43), eine einfache Überprüfung des Arbeitsraumes und die zusätzliche Einführung der fehlenden Bedingung (3.44). Im Fall eines parallelen Roboters mit mehr als drei Antrieben und Freiheitsgraden, eines redundanten Manipulators oder komplexerer Architekturen bzw. geometrischen Abhängigkeiten, kann die graphische Methode nicht so einfach, oder überhaupt nicht eingesetzt werden. Eine andere Möglichkeit, um die Eindeutigkeit der Lösung der direkten Kinematik zu gewährleisten, bietet sich durch den Einsatz der inversen Kinematik. Die Herleitung dieser Gleichungen ist nämlich deutlich einfacher als die der direkten Kinematik. Die Bedingungen können dadurch einfacher in die Gleichungen der inversen Kinematik eingebaut werden. Diese Beobachtung bestätigen die Gleichungen (3.25)-(3.34) im Abschnitt 3.3, welche immer eine korrekte Konfiguration der Antriebe für jeden beliebigen Punkt des kartesischen Arbeitsraumes ermitteln.

Mit der Annahme, die schon im vorherigen Abschnitt 3.4.2 getroffen wurde, dass die Abbildung zwischen der direkten und inversen Kinematik zusammen mit allen Bedingungen

stetig, eindeutig und reziprok sein sollte,

$$\underline{Q}^{DK} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow DKP \longrightarrow \underline{x} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow IKP \longrightarrow \underline{Q}^{IK} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.47)$$

$$\underline{Q}^{DK} \equiv \underline{Q}^{IK}, \quad (3.48)$$

kann ein Kriterium aufgestellt werden

$$IV : \text{abs}(\underline{Q}^{DK} - \underline{Q}^{IK}) < \underline{\xi}, \quad (3.49)$$

wobei \underline{Q}^{DK} die Konfiguration im Gelenkraum zur Berechnung der Endeffektorposition, \underline{Q}^{IK} aus der Endeffektorposition berechnete Konfiguration im Gelenkraum, \underline{x} die Endeffektorposition und $\underline{\xi}$ den Vektor der numerischen Genauigkeit des Rechners bezeichnen. Dieses Kriterium eliminiert diejenigen Lösungen, welche eine der in die Gleichungen der inversen Kinematik eingebauten Bedingungen nicht erfüllen.

Mit Hilfe des Kriteriums (3.49) wurden die Gleichungen (3.15)-(3.22) zusammen mit den Bedingungen (3.12)-(3.13), ähnlich wie im Abschnitt 3.4.2 untersucht. Die generierten Arbeitsräume entsprechen den Arbeitsräumen, die mit der zusätzlichen Bedingung (3.44) gewonnen wurden und in den Bildern 3.5(c) und 3.5(d) gezeigt sind. Mit diesem Kriterium werden die unzulässigen Bereiche auf Grund der unterschiedlichen Antriebswinkel erkannt. Bild 3.4(d) kann entnommen werden, dass der rechte Antriebswinkel Q_{21} für die direkte Kinematik und den unzulässigen Bereich einen negativen Wert angenommen hat. Für die inverse Kinematik wurde die Pose des Roboters korrekt ermittelt und der Winkel Q_{21} positiv definiert, was zur Eliminierung der falschen Antriebswinkelkombination geführt hat. In dem hier analysierten Fall war die Überprüfung der Antriebswinkel $\underline{Q}^{DK} = [Q_{11} \ Q_{21}]^T$ gemäß der Annahme (3.47) ausreichend, da die Bedingungen nur für die Koordinaten der aktiven Gelenke gefehlt hatten. Bei der Existenz von Singularitäten der direkten Kinematik müssen unter Umständen alle vier Winkel $\underline{Q}^{DK} = [Q_{11} \ Q_{21} \ Q_{12} \ Q_{22}]^T$ geprüft werden, um die Eindeutigkeit der Abbildung zu gewährleisten. In so einem Fall würden einer Konfiguration der Antriebswinkel zwei Posen entsprechen, die dann nur durch die Winkel der passiven Gelenke unterschieden werden können. Die Posen wären bezüglich der Singularität der direkten Kinematik, der Linie zwischen den beiden passiven Gelenken O_2 und O_4 , symmetrisch. Das widerspricht nicht der Forderung nach gleicher Dimension der beiden Konfigurationsräume (3.47), da hier eigentlich zwei Sub-Arbeitsräume in Betracht kommen würden. Eine der Posen muss entweder eliminiert oder durch zusätzliche Kriterien berücksichtigt werden, um zwischen diesen beiden Arbeitsräumen unterscheiden zu können. Sowohl die Neuformulierung der Gleichungen der direkten als auch der inversen Kinematik kann in so einem Fall nötig sein. Anschließend müssen noch

die geometrischen Abmessungen des Roboters eingeführt werden. Dies erfolgt auf die gleiche Weise, wie es bei der graphischen Methode der Fall war, da hier keine zusätzlichen expliziten Bedingungen hinzugekommen sind.

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass die Bedingungen implizit in die einfachen und übersichtlichen Gleichungen der inversen Kinematik eingebaut werden können, so dass im Prinzip die Suche nach den weiteren Bedingungen zur Konditionierung der Gleichungen der direkten Kinematik vermieden werden kann.

4 Dynamik eines elastischen parallelen Manipulators

4.1 Modellierung der Roboterdynamik

Es existieren bereits mehrere Verfahren zur Modellierung und Berechnung der Dynamik starrer paralleler Manipulatoren. Sie basieren auf zwei Ansätzen: der *Newton-Euler* Methode und dem *Lagrange-Formalismus*. Bei der *Newton-Euler* Methode werden die Gleichungen der Dynamik durch eine ausführliche Analyse aller Kräfte und Momente, die auf jeden Körper in der Robotstruktur wirken, hergeleitet [26, 121]. Deswegen kann die Aufstellung der Dynamikgleichungen für komplexe Systeme sehr kompliziert und arbeitsaufwendig werden. Da aber alle Kräfte und Momente explizit betrachtet und analysiert werden, ermöglicht diese Methode einen tiefen Einblick in die Systemdynamik. Die Nutzung des *Lagrange-Formalismus* bietet eine viel elegantere und effizientere Vorgehensweise an. Eine skalare Energiefunktion, genannt *Lagrangesche Funktion* (*Lagrangefunktion*), wird gebildet. Sie beschreibt in generalisierten Koordinaten die gesamte kinetische und potentielle Energie des mechanischen Robotersystems. Die dissipative Energie wird dabei separat betrachtet. Im Fall der parallelen Manipulatoren müssen zusätzliche Zwangsbedingungen in Form der algebraischen und Differentialgleichungen eingeführt werden, welche die Existenz der geschlossenen kinematischen Ketten berücksichtigen. Die Gleichungen der Dynamik für einen parallelen Manipulator setzen sich dann im Allgemeinen aus dem Satz der algebraischen und Differentialgleichungen (Zwangsbedingungen und Bewegungsgleichungen) zusammen (DAE).

Die auf dem *Lagrange-Formalismus* basierenden Methoden werden sehr oft im Bereich der parallelen Manipulatoren verwendet [12, 56]. Einen besonderen Platz in dieser Familie nehmen zwei Verfahren ein: die *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen erster Art* und der *Lagrange-D'Alembert Formalismus* [91, 92, 96, 123, 124, 148]. In diesen Methoden werden die Bewegungsgleichungen in generalisierten Koordinaten aufgestellt. Sie setzen sich aus den nicht-redundanten Koordinaten der aktiven, angetriebenen Gelenke und der zusätzlichen Menge

der redundanten Koordinaten der passiven, nicht-angetriebenen Gelenke oder den Koordinaten des Endeffektors bzw. der Plattform zusammen. Im Fall eines elastischen Manipulators muss zusätzlich ein Satz elastischer Freiheitsgrade (engl. degrees of freedom - DOF) eingeführt werden. In den generalisierten Koordinaten wird eine Energiefunktion, die *Lagrangesche Funktion*, des mechanischen Systems formuliert. Zusätzlich müssen noch die Bedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten berücksichtigt werden. In den *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen erster Art* wird dieses durch die Einführung der *Lagrange-Multiplikatoren* gelöst. Im Gegensatz dazu wird im *Lagrange-D'Alembert Formalismus* eine Jacobimatrix eingesetzt, die aus den Bedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten hergeleitet und durch die nicht-redundanten Koordinaten parametrisiert wurde. Der Einsatz der Jacobimatrix zur Parametrierung der Bewegungsgleichungen bringt einen großen Vorteil mit sich, besonders für die parallelen Manipulatoren mit elastischen Komponenten. Die schon bekannten Methoden und Techniken zur Modellierung der Dynamik der seriellen elastischen Roboter können nämlich ohne Modifikationen auch für diese Klasse der Manipulatoren verwendet werden [53, 99, 105]. Die Berücksichtigung bestimmter Effekte, wie z.B. der Reibung oder der Elastizität, stellt dabei keine große Komplikation dar. Diese Methode führt zu kompakten Dynamikgleichungen in Minimalform für den parallelen Manipulator. Diese Minimalform des mathematischen Modells ist besonders bei der Systemanalyse und beim Reglerentwurf vorteilhaft. Sie kann allerdings Probleme bei der zeiteffizienten Berechnung der direkten Dynamik in den beiden angesprochenen Methoden verursachen. Die Berechnung der direkten Dynamik erfordert unter anderem die Invertierung der Trägheitsmatrix. Bei Systemen höherer Ordnung kann diese Operation sehr rechenintensiv werden, was letztendlich eine Limitierung in der Echtzeit-Berechnung des Modells bei nichtlinearer Regelung bedeuten kann. Gerade die Berücksichtigung der Elastizitäten in der Modellierungsphase, abhängig vom Detaillierungsgrad, kann zu solchen Systemen hoher Ordnung führen. Die Aufteilung der Gleichungen der direkten Dynamik in kleine Gruppen niedrigerer Ordnung und deren gleichzeitige, parallele Berechnung könnte den Rechenaufwand reduzieren. In der Literatur konnten nur wenige Lösungen zu dieser Problematik gefunden werden [112, 137]. Eine davon war die Methode der virtuellen Feder (engl. virtual spring approach) [137, 138]. In dieser Methode verlangt die Modellierung der Roboterdynamik die Modifikation der Gleichungen und die Einführung zusätzlicher Elemente - virtueller Federn, welche die Bindungen zwischen den Teilgleichungen bilden sollen. Im Fall der elastischen Manipulatoren erscheint die Einführung zusätzlicher Elastizitäten in die Gleichungen ungeeignet, da dies die resultierenden Eigenfrequenzen ändert und schließlich zu groben Fehlern führen kann.

Dieses Kapitel beginnt mit einer kurzen Beschreibung der zwei bereits erwähnten Standardmethoden aus der *Lagrange-Formalismus-Familie*. Sie werden um die Betrachtung der

elastischen Freiheitsgrade erweitert. Diese werden dabei als diskrete Größen dargestellt, was zur Standardvorgehensweise bei der Analyse und Modellierung elastischer Manipulatoren gehört. Diese Problematik wurde bereits im Abschnitt 2.3.2 besprochen [11, 105]. Ergänzend zu diesen beiden Methoden wird eine neue Prozedur zur Herleitung der Jacobimatrizen der elastischen parallelen Manipulatoren vorgestellt [127, 129]. Sie erlaubt auf eine systematische Weise die Aufstellung der Jacobimatrix des parallelen Manipulators aus den Jacobimatrizen der einzelnen seriellen kinematischen Ketten. Diese Vorgehensweise ist besonders für die elastischen parallelen Manipulatoren von Vorteil. Basierend auf den hier diskutierten Verfahren wird eine neuartige Methode zur gleichzeitigen Berechnung verteilter Gleichungen der direkten Dynamik paralleler, vor allem elastischer Manipulatoren (engl. Simultaneous Calculation of the Direct Dynamics - SCDD) präsentiert [123, 124, 127, 128]. Die Komplexität sowohl der Gleichungen selbst als auch der einzelnen Ausdrücke wird dank der verteilten Berechnung möglichst niedrig gehalten. Anschließend werden die Eigenschaften eines elastischen parallelen Manipulators im kartesischen Konfigurationsraum hinsichtlich des Schwingungsverhaltens besprochen.

4.2 Lagrangeschen Bewegungsgleichungen erster Art

Die *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen erster Art* sind in der Menge redundanter Koordinaten formuliert [50, 86, 136]. Es wird angenommen, dass der parallele Manipulator im Allgemeinen n_n Gelenke jeweils mit nur einem Freiheitsgrad besitzt. Davon sind n_a die Freiheitsgrade der aktiven angetriebenen Gelenke, n_e die elastischen Freiheitsgrade und n_p die redundanten Koordinaten der passiven Gelenke. Die Koordinaten des Endeffektors bzw. der Endeffektorplattform können ebenfalls als redundante Koordinaten verwendet werden. Die Koordinaten der aktiven angetriebenen Gelenke n_a und der elastischen Freiheitsgrade n_e gehören zu der Menge der nicht-redundanten Koordinaten. Die Koordinaten der n_e elastischen Freiheitsgrade sind dabei mit den inneren Kräften in den Roboter-elementen verbunden, welche durch die mechanischen Beanspruchungen induziert werden. Es wird weiter die Steuerbarkeit der starren Roboterstruktur angenommen. Alle Koordinaten können zu einem Vektor zusammengefasst werden

$$\underline{q}_b = \underline{q}_b(\underline{q}_a, \underline{q}_p, \underline{q}_e), \quad (4.1)$$

wobei $\underline{q}_a \in \mathbb{R}^{n_a \times 1}$, $\underline{q}_p \in \mathbb{R}^{n_p \times 1}$, $\underline{q}_e \in \mathbb{R}^{n_e \times 1}$, $\underline{q}_b \in \mathbb{R}^{n_b \times 1}$ und $n_b = n_a + n_p + n_e$. Der Vektor \underline{q}_b beinhaltet die Koordinaten der globalen Bewegung des Manipulators, erweitert um die nicht-redundanten Freiheitsgrade der elastischen Deformationen der Roboterstruktur. Die

redundanten Koordinaten der passiven Gelenke \underline{q}_p hängen von den übrigen nicht-redundanten Koordinaten ab

$$\underline{q}_p = \underline{q}_p(\underline{q}_a, \underline{q}_e). \quad (4.2)$$

Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs (4.2) kann die Formulierung (4.1) vereinfacht als $\underline{q}_b = \underline{q}_b(\underline{q}_a, \underline{q}_e)$ geschrieben werden. Die Existenz der redundanten Koordinaten erfordert die Einführung zusätzlicher Zwangsbedingungen in den Gleichungen der Dynamik, um die Dynamik des Manipulators berechnen zu können. Sie ergeben sich aus den kinematischen Beziehungen der geschlossenen kinematischen Ketten. Die kinematischen Zwangsbedingungen zusammen mit ihren Ableitungen ergänzen die Gleichungen der Roboterdynamik, so dass die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der unbekannten Größen ist. Somit sind die *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen erster Art* auf folgende Weise formuliert

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{\underline{q}}_b} - \frac{\partial L_b}{\partial \underline{q}_b} + \frac{\partial R_b}{\partial \dot{\underline{q}}_b} = \underline{\tau}_b + \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \frac{\partial h_i}{\partial \underline{q}_b}, \quad (4.3)$$

wobei L_b die aus der kinetischen und potenziellen Energie des Systems bestehende *Lagrange-Funktion*, R_b die *Rayleighsche Dissipationsfunktion* und h_i die i -te Zwangsbedingung bedeuten. Die Anzahl der redundanten Koordinaten und ebenso die Anzahl der Zwangsbedingungen wird durch n_p bezeichnet. Die generalisierten Momente/Kräfte werden durch $\underline{\tau}_b$ und die *Lagrange-Multiplikatoren* durch λ_i gekennzeichnet. Um die Lösung zu vereinfachen, wird dieses Gleichungssystem in zwei Mengen geteilt [136].

4.2.1 Inverse Dynamik - ID

Die erste Menge der n_p Gleichungen bezieht sich auf die redundanten Koordinaten und ist mit den kinematischen Zwangsbedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten assoziiert. Die Unbekannten sind hier die *Lagrange-Multiplikatoren* $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_p \times 1}$. Die Gleichung nimmt die Form

$$\sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \frac{\partial h_i}{\partial \underline{q}_b} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{\underline{q}}_b} - \frac{\partial L_b}{\partial \underline{q}_b} + \frac{\partial R_b}{\partial \dot{\underline{q}}_b} - \underline{\hat{\tau}}_b \quad (4.4)$$

an, wobei $\underline{\hat{\tau}}_b$ den Vektor der bekannten am Manipulator einwirkenden generalisierten Momente/Kräfte bezeichnet. Die Momente/Kräfte der Aktoren werden an dieser Stelle nicht berücksichtigt. Aus dem Gleichungssystem (4.4) der redundanten Koordinaten werden die n_p *Lagrange-Multiplikatoren* $\underline{\lambda}$ ermittelt. Die zweite Menge der $(n_a + n_e)$ Gleichungen bezieht

sich auf die nicht-redundanten Freiheitsgrade. Die einzigen Unbekannten in diesem Gleichungssystem sind die Momente und Kräfte der Aktoren, welche wie folgt berechnet werden können

$$\underline{\tau}_b = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \underline{\dot{q}}_b} - \frac{\partial L_b}{\partial \underline{q}_b} + \frac{\partial R_b}{\partial \underline{\dot{q}}_b} - \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \frac{\partial h_i}{\partial \underline{q}_b}. \quad (4.5)$$

Die beiden Matrixgleichungen (4.4) und (4.5) ermöglichen bei gegebener Trajektorie die Berechnung der Momente/Kräfte der Aktoren, welche zu der erwarteten Bewegung des elastischen parallelen Manipulators führen. Die Deformation der elastischen Elemente ist von der Bewegung des Manipulators selbst und den externen Momenten/Kräften abhängig. Daher ist die Ermittlung derartiger Trajektorien kompliziert oder sogar unmöglich. Aus diesem Grund werden die Momente/Kräfte der Antriebe für einen elastischen Manipulator zumeist aus den Gleichungen der inversen Dynamik des Starrkörpermodells des Roboters berechnet.

4.2.2 Direkte Dynamik - DD

Die direkte Dynamik wird für die gegebenen Momente/Kräfte der Aktoren auf ähnliche Weise berechnet wie die inverse Dynamik. Zu diesem Zweck werden die n_p redundanten Koordinaten und ihre Ableitungen aus den i kinematischen Zwangsbedingungen h_i und deren Ableitungen, anhand von den nicht-redundanten n_a Koordinaten der Aktoren und den n_e elastischen Freiheitsgraden, ermittelt. Aus dem Gleichungssystem (4.4) werden die Momente/Kräfte der Zwangsbedingungen berechnet. Damit sind die Momente/Kräfte sowohl der Aktoren als auch der Zwangsbedingungen bekannt, so dass die Gleichung (4.5) für die unbekannten Beschleunigungen gelöst werden kann. Die Positionen/Winkel und Geschwindigkeiten dieser Freiheitsgrade können durch numerische Integration ermittelt werden. Die Konfiguration bzw. der Zustand des elastischen parallelen Manipulators ist somit vollständig bestimmt.

4.2.3 Eigenschaften

Die Koordinaten der aktiven angetriebenen Gelenke und der elastischen Freiheitsgrade bilden eine nicht-redundante Untermenge der generalisierten redundanten Koordinaten. Die übrigen redundanten Koordinaten können relativ frei ausgewählt werden. Es kommen die Koordinaten der Arbeitsplattform bzw. des Endeffektors oder auch die Freiheitsgrade der passiven Gelenke in Frage. [50, 86, 136]. Die *Lagrange-Multiplikatoren* können dabei die Bedeutung der generalisierten Momente/Kräfte besitzen, welche in der Roboterstruktur die Bedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten erzwingen.

Die Anwendung dieses Verfahrens bringt allerdings bestimmte Nachteile mit sich. Die Methoden zur Modellierung der Dynamik serieller Kinematiken verlangen in diesem Fall gewisse Modifikationen, um die *Lagrange-Multiplikatoren* in den Gleichungen zu berücksichtigen [56, 86]. Dies kann insbesondere bei der Modellierung der elastischen parallelen Manipulatoren zu Komplikationen und zusätzlichem Arbeitsaufwand führen [50]. Ein weiterer Nachteil ergibt sich aus der Struktur der Gleichungen, die eine klare physikalische Interpretation der Terme und dadurch auch ihre Analyse erschweren kann.

4.3 Lagrange - D'Alembert - Formalismus

4.3.1 Inverse Dynamik - ID

Der *Lagrange-D'Alembert-Formalismus* repräsentiert eine elegante und effektive Methode zur Betrachtung der Dynamik von parallelen Manipulatoren [91, 92, 96, 148]. Wie schon in Abschnitt 4.2 wird eine Menge der generalisierten redundanten Koordinaten gewählt. Allerdings werden hier keine zusätzlichen Multiplikatoren benötigt. Diese Methode ist mit den aus der seriellen Robotik bekannten Vorgehensweisen verwandt. Sie setzt sich aus den drei folgenden Schritten zusammen:

1. *Transformation des Systems*: Jede geschlossene kinematische Kette des parallelen Manipulators wird an einem passiven Gelenk, einem Arm oder dem Endeffektor getrennt. Das Ergebnis ist ein reduziertes System, das auch als Baumstruktur bezeichnet wird [92]. Infolgedessen treten nur serielle kinematische Ketten in so einem System auf. Des Weiteren wird angenommen, dass jedes passive Gelenk eines solchen Systems mit einem virtuellen Aktor ausgestattet ist.
2. *Berechnung der Momente/Kräfte*: Die Momente/Kräfte der realen und virtuellen Aktoren werden für jede serielle kinematische Kette berechnet. Sie bewirken bei jeder Kette eine Bewegung, die der Bewegung des kompakten parallelen Manipulators entspricht.
3. *Transformation der Momente/Kräfte*: Die Momente/Kräfte der Aktoren des kompakten parallelen Manipulators werden, unter Beachtung der Zwangsbedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten, aus den Momenten/Kräften der Baumstruktur berechnet.

Es wird angenommen, dass der Manipulator n_l geschlossene kinematische Ketten besitzt. In der Roboterstruktur befinden sich n_n Gelenke mit nur einem Freiheitsgrad. Davon sind n_e und n_{kp} entsprechend die elastischen Freiheitsgrade und die redundanten Koordinaten

der passiven Gelenke der kompakten Struktur. Die Koordinaten der aktiven angetriebenen Gelenke n_a und der elastischen Freiheitsgrade n_e gehören zu der Menge der nicht-redundanten Koordinaten. Es wird weiter die Steuerbarkeit der starren Roboterstruktur angenommen. Gemäß dem ersten Schritt wird der parallele Manipulator in eine Baumstruktur zerlegt. Die Anzahl der Freiheitsgrade der aktiven Gelenke bleibt in dem reduzierten System die gleiche wie im originalen $n_a = (n_n - n_{kp} - n_e)$. Die Menge der elastischen Freiheitsgrade n_e verändert sich ebenfalls nicht und die Menge der Koordinaten der passiven Gelenke nimmt ab $n_p = (n_{kp} - n_l)$. Alle Koordinaten können zu einem Vektor zusammengefasst werden

$$\underline{q}_b = \underline{q}_b(\underline{q}_a, \underline{q}_p, \underline{q}_e), \quad (4.6)$$

wobei $\underline{q}_a \in \mathbb{R}^{n_a \times 1}$, $\underline{q}_p \in \mathbb{R}^{n_p \times 1}$, $\underline{q}_e \in \mathbb{R}^{n_e \times 1}$, $\underline{q}_b \in \mathbb{R}^{n_b \times 1}$ und $n_b = n_a + n_p + n_e$. Der Vektor \underline{q}_b beinhaltet die Koordinaten der globalen Bewegung des Manipulators, erweitert um die nicht-redundanten Freiheitsgrade der elastischen Deformationen. Die redundanten Koordinaten der passiven Gelenke \underline{q}_p hängen von den Koordinaten der aktiven Gelenke \underline{q}_a und den elastischen Freiheitsgraden \underline{q}_e ab

$$\underline{q}_p = \underline{q}_p(\underline{q}_{ae}), \quad (4.7)$$

wobei $\underline{q}_{ae} \in \mathbb{R}^{n_{ae} \times 1}$ und $n_{ae} = n_a + n_e$. Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs (4.7) kann die Formulierung (4.6) vereinfacht als $\underline{q}_b = \underline{q}_b(\underline{q}_{ae})$ geschrieben werden. Die redundanten Koordinaten können in Abhängigkeit von den nicht-redundanten Freiheitsgraden (4.7), wenn überhaupt in nur wenigen Fällen, in einem geschlossenen analytischen Ausdruck angegeben werden. Sie können aber immer aus den geometrischen Beziehungen der starren steuerbaren Roboterstruktur bestimmt werden [84, 122]. Aus diesem Grund wird eine alternative Lösung vorgeschlagen, um die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der redundanten und nicht-redundanten Größen in einem geschlossenen analytischen Ausdruck erfassen zu können [148]. Zu diesem Zweck werden die kinematischen Zwangsbedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten eingeführt

$$\underline{h}(\underline{q}_b) = \underline{h}(\underline{q}_{ae}, \underline{q}_p) = \underline{0}. \quad (4.8)$$

Nach der zeitlichen Differentiation des Gleichungssystems (4.8) können die Zwangsbedingungen in der *Pfaffschen Form* angegeben werden:

$$\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{q}_{ae}^T} \dot{\underline{q}}_{ae} + \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{q}_p^T} \dot{\underline{q}}_p = \underline{0}. \quad (4.9)$$

Das Ziel ist nun, die Transformation zwischen den Konfigurationsräumen der Baumstruktur und des kompakten parallelen Manipulators zu finden. Ausgehend von dem *D'Alembertschen Prinzip* muss die virtuelle Arbeit der beiden Systeme, des reduzierten und des originalen Systems, gleich sein

$$\delta \underline{q}_k^T \underline{\tau}_k = \delta \underline{q}_b^T \underline{\tau}_b, \quad (4.10)$$

wobei $\underline{\tau}_b \in \mathbb{R}^{n_b \times 1}$ und $\underline{\tau}_k \in \mathbb{R}^{n_{ae} \times 1}$ jeweils die Vektoren der Momente/Kräfte der Baumstruktur und des kompakten parallelen Manipulators bezeichnen. Die *Lagrangesche Gleichung* für das reduzierte System lautet

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{\underline{q}}_b} - \frac{\partial L_b}{\partial \underline{q}_b} + \frac{\partial R_b}{\partial \dot{\underline{q}}_b} - \underline{\tau}_b \right)^T \delta \underline{q}_b = 0, \quad (4.11)$$

wobei $L_b = T_b - V_b$ die aus der kinetischen und potenziellen Energie des reduzierten Systems bestehende *Lagrangesche Funktion* und R_b die *Rayleighsche Dissipationsfunktion* bedeuten. Es wird weiter angenommen, dass der Manipulator steuerbar ist und sich nicht in einer singulären Konfiguration befindet. Dann ist die Matrix $\partial \underline{h} / \partial \underline{q}_p^T$ aus (4.9) quadratisch und invertierbar. Der Konfigurationsraum des reduzierten Systems kann somit durch die Koordinaten der nicht-redundanten Freiheitsgrade \underline{q}_{ae} stetig/glatt parametrisiert werden

$$\dot{\underline{q}}_p = - \left(\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{q}_p^T} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{q}_{ae}^T} \right) \dot{\underline{q}}_{ae} = \left(\frac{\partial \underline{q}_p}{\partial \underline{q}_{ae}^T} \right) \dot{\underline{q}}_{ae}. \quad (4.12)$$

Diese Parametrisierung erlaubt es, die Gleichungen der Dynamik allein in Abhängigkeit von den aktiven und elastischen Freiheitsgraden \underline{q}_{ae} auszudrücken. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.6) und (4.12) kann (4.11) folgendermaßen aufgeschrieben werden

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{\underline{q}}_{ae}} - \frac{\partial L_b}{\partial \underline{q}_{ae}} + \frac{\partial R_b}{\partial \dot{\underline{q}}_{ae}} - \underline{\tau}_{ae} \right)^T \delta \underline{q}_{ae} \\ & + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{\underline{q}}_p} - \frac{\partial L_b}{\partial \underline{q}_p} + \frac{\partial R_b}{\partial \dot{\underline{q}}_p} - \underline{\tau}_p \right)^T \delta \underline{q}_p = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

und

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{\underline{q}}_{ae}} - \frac{\partial L_b}{\partial \underline{q}_{ae}} + \frac{\partial R_b}{\partial \dot{\underline{q}}_{ae}} \right) + \left(\frac{\partial \underline{q}_p}{\partial \underline{q}_{ae}^T} \right)^T \\ & \cdot \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{\underline{q}}_p} - \frac{\partial L_b}{\partial \underline{q}_p} + \frac{\partial R_b}{\partial \dot{\underline{q}}_p} \right) = \underline{\tau}_{ae} + \left(\frac{\partial \underline{q}_p}{\partial \underline{q}_{ae}^T} \right)^T \underline{\tau}_p. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Die Bewegungsgleichungen des kompakten parallelen Manipulators sind ähnlich der Gleichung (4.11) und nehmen folgende Form an

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_k}{\partial \dot{q}_{ae}} - \frac{\partial L_k}{\partial q_{ae}} + \frac{\partial R_k}{\partial \dot{q}_{ae}} \right) = \tau_k. \quad (4.15)$$

Basierend auf der Definition (4.10) können die beiden Gleichungen (4.14) and (4.15) zusammengefasst werden

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial L_k}{\partial \dot{q}_{ae}} - \frac{\partial L_k}{\partial q_{ae}} + \frac{\partial R_k}{\partial \dot{q}_{ae}} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{q}_{ae}} - \frac{\partial L_b}{\partial q_{ae}} + \frac{\partial R_b}{\partial \dot{q}_{ae}} \right) \\ & \quad + \left(\frac{\partial q_p}{\partial q_{ae}^T} \right)^T \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L_b}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial L_b}{\partial q_p} + \frac{\partial R_b}{\partial \dot{q}_p} \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

woraus folgt

$$\tau_k = \tau_{ae} + \left(\frac{\partial q_p}{\partial q_{ae}^T} \right)^T \tau_p. \quad (4.17)$$

Nach genauerer Betrachtung der Gleichungen (4.16) und (4.17) kann eine Transformationsmatrix zwischen der Baumstruktur und dem kompakten parallelen Manipulator angegeben werden

$$\underline{\underline{W}} = \frac{\partial q_b}{\partial q_{ae}^T} \quad (4.18)$$

Weitere Informationen zu den hier angegebenen Herleitungen finden sich in der Literatur [91, 92].

Um die Transformation zwischen der Baumstruktur und dem kompakten parallelen Manipulator übersichtlicher darzustellen, werden nun die Gleichungen (4.11) und (4.15) in Matrixform gebracht. Die Bewegungsgleichung der Baumstruktur lautet

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{M}}_b(q_b) \ddot{q}_b + \underline{\underline{C}}_b(\dot{q}_b, q_b) \dot{q}_b + \underline{\underline{\eta}}_b(q_b) \\ & \quad + \underline{\underline{K}}_b q_b + \underline{\underline{D}}_b \dot{q}_b = \tau_b, \end{aligned} \quad (4.19)$$

wobei $\underline{\underline{M}}_b(q_b)$, $\underline{\underline{C}}_b(\dot{q}_b, q_b) \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$ jeweils die Trägheitsmatrix und die *Coriolis*- und Zentrifugalkräftematrix der Baumstruktur bezeichnen. Diese Matrizen und ihre parametrisierten

Formen erfüllen folgende strukturelle Eigenschaften, die bei der Reglersynthese genutzt werden können [89, 121]:

1. $\underline{\underline{M}}_b(\underline{q}_b)$ ist eine symmetrische und positiv definite Matrix,
2. $\underline{\underline{M}}_b(\underline{q}_b) - 2\underline{\underline{C}}_b(\underline{\dot{q}}_b, \underline{q}_b)$ ist eine schiefsymmetrische Matrix.

$\underline{\eta}_b(\underline{q}_b) \in \mathbb{R}^{n_b \times 1}$ ist der im Gelenkraum ausgedrückte Vektor der Gravitationskräfte/momente. $\underline{\underline{K}}_b \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$ und $\underline{\underline{D}}_b \in \mathbb{R}^{n_b \times n_b}$ repräsentieren die im Gelenkraum definierte, im Allgemeinen blockdiagonale Steifigkeits- bzw. Dämpfungsmatrix. Unter Anwendung der Transformationsmatrix $\underline{\underline{W}}$, aus der Gleichung (4.18), kann die Bewegungsgleichung des reduzierten Systems (4.19) in die Gleichung der Dynamik des kompakten parallelen Manipulators überführt werden. Die so gewonnene Bewegungsgleichung wird in Abhängigkeit von den nicht-redundanten Koordinaten der aktiven Gelenke und der elastischen Freiheitsgrade \underline{q}_{ae} ausgedrückt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_k(\underline{q}_b) \underline{\underline{\ddot{q}}}_{ae} + \underline{\underline{C}}_k(\underline{\dot{q}}_b, \underline{q}_b) \underline{\underline{\dot{q}}}_{ae} + \underline{\eta}_k(\underline{q}_b) \\ + \underline{\underline{K}}_k \underline{q}_{ae} + \underline{\underline{D}}_k \underline{\dot{q}}_{ae} = \underline{\tau}_k, \end{aligned} \quad (4.20)$$

wobei die einzelnen Matrizen folgendermaßen definiert werden:

$$\underline{\underline{M}}_k = \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}}_b \underline{\underline{W}} \in \mathbb{R}^{n_{ae} \times n_{ae}}, \quad (4.21)$$

$$\underline{\underline{C}}_k = \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{M}}_b \underline{\dot{\underline{W}}} + \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{C}}_b \underline{\underline{W}} \in \mathbb{R}^{n_{ae} \times n_{ae}}, \quad (4.22)$$

$$\underline{\eta}_k = \underline{\underline{W}}^T \underline{\eta}_b \in \mathbb{R}^{n_{ae} \times 1}, \quad (4.23)$$

$$\underline{\underline{K}}_k = \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{K}}_b \underline{\underline{W}} \in \mathbb{R}^{n_{ae} \times n_{ae}}, \quad (4.24)$$

$$\underline{\underline{D}}_k = \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{D}}_b \underline{\underline{W}} \in \mathbb{R}^{n_{ae} \times n_{ae}}, \quad (4.25)$$

$$\underline{\tau}_k = \underline{\underline{W}}^T \underline{\tau}_b \in \mathbb{R}^{n_{ae} \times 1}. \quad (4.26)$$

Dieses Verfahren bietet zwei Möglichkeiten zur Berechnung der Antriebsmomente/kräfte der Aktoren des kompakten parallelen Manipulators. In der ersten Methode werden alle realen und virtuellen Antriebsmomente/kräfte der Baumstruktur (4.11) berechnet. Sie können dann gemäß den Formeln (4.17) oder (4.26) zu den Momenten/Kräften des kompakten parallelen Manipulators transformiert werden. In der zweiten Methode werden dagegen die Bewegungsgleichungen der Baumstruktur (4.19) gemäß den Gleichungen (4.21)-(4.26) parametrisiert und

damit in die Gleichungen der Dynamik des kompakten parallelen Manipulators (4.20) transformiert. Aus diesen Gleichungen können dann die gesuchten Antriebsmomente/kräfte berechnet werden.

4.3.2 Direkte Dynamik - DD

Im *Lagrange-D'Alembert Formalismus* werden die Gleichungen der direkten Dynamik aus den kompakten Gleichungen der inversen Dynamik (4.20) gewonnen:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{ae} = & \underline{\underline{M_k}}(q_b)^{-1}(\underline{\tau_k} - \underline{\underline{C_k}}(\dot{q}_b, q_b)\dot{q}_{ae} \\ & - \underline{\eta_k}(q_b) - \underline{\underline{K_k}} q_{ae} - \underline{\underline{D_k}} \dot{q}_{ae}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Die Gleichung der direkten Dynamik des kompakten parallelen Manipulators wird ebenfalls in Abhängigkeit der nicht-redundanten Koordinaten q_{ae} formuliert. Die redundanten Koordinaten der passiven Gelenke, welche zur Berechnung der Gleichungen sowohl der inversen als auch direkten Dynamik notwendig sind, werden aus den Zwangsbedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten des Roboters (4.7) und deren erster Ableitung (4.12) und, falls notwendig, zweiter Ableitung berechnet.

4.3.3 Eigenschaften

Bei dieser Methode können die bekannten Techniken und Verfahren zur Beschreibung der Dynamik der elastischen seriellen Manipulatoren ohne Modifikationen zur Modellierung der elastischen parallelen Manipulatoren verwendet werden [53, 99, 105]. Die Berechnung der inversen Dynamik kann für die einzelnen seriellen kinematischen Ketten parallel durchgeführt werden, wobei sich die Komplexität der Terme nicht erhöht und so der Zeitaufwand reduziert wird. Diese Eigenschaft ist besonders bei der Echtzeitberechnungen der Roboterdynamik von großem Vorteil. Die Gleichungen der direkten Dynamik können nur in der Kompaktform formuliert werden. Der Nachteil dieser Form besteht darin, dass die Berechnung nicht verteilt und parallel durchgeführt werden kann. Dieses Problem wirkt sich insbesondere bei den elastischen Manipulatoren spürbar aus. Die Modellierung solcher Roboter kann die Berücksichtigung vieler Parameter erforderlich machen, um das System in seinen Haupteigenschaften ausreichend genau mathematisch zu erfassen. Die im Abschnitt 2.3.2 beschriebene Finite-Elemente-Methode kann zu solchen Gleichungen höherer Ordnung führen [11, 139]. Eine hohe Ordnung der Dynamikgleichungen kann eine Echtzeitberechnung des Modells gänzlich verhindern, oder zumindest beträchtlich erschweren.

4.4 Jacobimatrix paralleler Manipulatoren

4.4.1 Herleitung der Jacobimatrix

Bei den herkömmlichen Methoden wird die Jacobimatrix eines parallelen Manipulators unter anderem aus dem Vektorzug der Geschwindigkeiten, wie bereits in Abschnitt 3.4.1 besprochen, oder aus der Analyse seiner Statik hergeleitet [56, 84, 136]. Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, wie beim *Lagrange-D'Alembert-Formalismus* das Gesamtmodell des parallelen Manipulators aus den Dynamikgleichungen der einzelnen seriellen kinematischen Ketten auf systematische Weise hergeleitet werden kann [91, 92, 96, 148]. Es wurde bei dieser Methode jedoch nicht gezeigt, wie die Jacobimatrizen \underline{J}_i der seriellen kinematischen Ketten der Baumstruktur zu der kompakten Jacobimatrix \underline{G} des parallelen Manipulators transformiert werden können. Dabei soll daran erinnert werden, dass zur Herleitung der Gleichungen der Dynamik der einzelnen Führungsketten deren Jacobimatrizen aufgestellt werden müssen [129]. Um den Arbeitsaufwand insbesondere bei der Modellierung der elastischen Manipulatoren zu minimieren, wäre es von großem Vorteil, diese bereits aufgestellten Jacobimatrizen \underline{J}_i weiter zu benutzen. Aus diesem Grund wurde ein Verfahren entwickelt, um eine entsprechende Transformation zu ermöglichen. Zu diesem Zweck wird die Transformationsmatrix \underline{W} zur Parametrierung des Konfigurationsraumes gemäß der Gleichung (4.18) eingesetzt. Diese Matrix wurde bereits bei der Modellierung nach der *Lagrange-D'Alembert-Methode* hergeleitet. Außerdem wird eine Matrix der Statik \underline{S} des parallelen Manipulators gebildet. Sie beschreibt die Beziehung zwischen den Kräften in den Armen des parallelen Manipulators $\underline{f}_b \in \mathbb{R}^{n_a \times 1}$ und der externen Kraft an seinem Endeffektor \underline{f}_x . Die Verteilung der externen Kraft \underline{f}_x in den Armen des Manipulators ist in Bild 4.1 dargestellt.

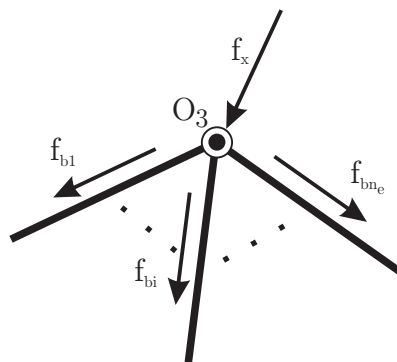


Bild 4.1: Kraftverteilung in der Roboterstruktur

Die skalaren Kräfte in den Armen können aus der Formel

$$\underline{f}_b = \begin{bmatrix} \underline{s}_1 & \dots & \underline{s}_{n_a} \end{bmatrix}^{-1} \underline{f}_x = \underline{S}^{-1} \underline{f}_x \quad (4.28)$$

ermittelt werden. Wenn die Matrix \underline{S} keine quadratische Matrix ist, bezeichnet die Inverse \underline{S}^{-1} eine Pseudo-Inverse \underline{S}^+ [56, 91]. Die Elemente $\underline{s}_i(q_{ai}, q_{pi}, q_{ei})$ der Matrix \underline{S} beschreiben die Beziehungen zwischen den skalaren, in Richtung des i -ten Armes einwirkenden Kräften f_{bi} und ihren kartesischen Komponenten

$$\underline{f}_{bxi} = \underline{s}_i f_{bi}. \quad (4.29)$$

In der Matrixform kann diese Relation mit der Matrix \underline{U} für alle Vektoren \underline{s}_i der Matrix \underline{S} geschrieben werden

$$\underline{f}_{bx} = \begin{bmatrix} \underline{s}_1 & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \dots & \underline{s}_{n_a} \end{bmatrix} \underline{f}_b = \underline{U} \underline{f}_b. \quad (4.30)$$

Die Jacobimatrix \underline{J}_b der Baumstruktur setzt sich aus den Jacobimatrizen $\underline{J}_i(q_{ai}, q_{pi}, q_{ei})$ der n_a einzelnen seriellen kinematischen Ketten zusammen und wird folgendermaßen definiert

$$\underline{J}_b = \begin{bmatrix} \underline{J}_1 & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & \dots & \underline{J}_{n_a} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Zur Herleitung der Jacobimatrix \underline{G} eines parallelen Manipulators muss die Jacobimatrix der Baumstruktur \underline{J}_b durch die Transformationsmatrix \underline{W} parametrisiert werden. Die Terme der Jacobimatrix \underline{J}_b , welche sich auf die Koordinaten der passiven Gelenke q_p beziehen, werden dadurch eliminiert. Die so gewonnene Matrix stellt jedoch keine Abbildung zwischen den Geschwindigkeiten bzw. den Kräften der beiden Konfigurationsräume dar. Um diese Abbildung aufzustellen, müssen noch die beiden Transformationen \underline{S}^{-1} und \underline{U} eingeführt werden. Die Transformationsmatrix \underline{S}^{-1} gemäß Gleichung (4.28) beschreibt die Beziehung zwischen der kartesischen Kraft am Endeffektor \underline{f}_x und den auf die Arme des parallelen Manipulators einwirkenden Kräften \underline{f}_b . Die Matrix \underline{U} gemäß Gleichung (4.30) repräsentiert die Relation zwischen den einwirkenden Kräften \underline{f}_b und ihren kartesischen Komponenten \underline{f}_{bx} . Unter Berücksichtigung der beiden Transformationen und der Parametrierung der Jacobimatrix der Baumstruktur kann die pseudo-inverse Jacobimatrix \underline{G}^+ des kompakten parallelen Manipu-

lators auf folgende Weise formuliert werden

$$\underline{\underline{G}}^{+T} = \underline{\underline{W}}^T \underline{\underline{J}}_b^T \underline{\underline{U}} \underline{\underline{S}}^{-1}. \quad (4.32)$$

Diese pseudo-inverse Jacobimatrix $\underline{\underline{G}}^{+T}$ stellt eine Abbildung zwischen den kartesischen Kräften am Endeffektor des parallelen Manipulators \underline{f}_x und den Momenten/Kräften des Gelenkraumes der Roboterstruktur $\underline{\tau}_{kae} \in \mathbb{R}^{n_{ae} \times 1}$ dar. Diese Beziehung kann in folgende Form

$$\underline{\tau}_{kae} = \underline{\underline{G}}^{+T} \underline{f}_x \quad (4.33)$$

gebracht werden. Diese neue Methode hat den großen Vorteil, dass die Herleitung der Jacobimatrizen $\underline{\underline{J}}_i$ der elastischen seriellen kinematischen Ketten weniger arbeitsaufwändig ist als die Herleitung der kompakten Jacobimatrix $\underline{\underline{G}}$ eines elastischen parallelen Manipulators. Außerdem werden die „seriellen“ Jacobimatrizen bereits für die Modellierung der Roboterstruktur aufgestellt, was den Arbeitsaufwand noch weiter reduziert.

4.4.2 Dualität der Jacobimatrizen

Nach der Herleitung der Jacobimatrix $\underline{\underline{G}}$ für den parallelen Manipulator (4.32) stellt sich die Frage nach dem Verhältnis dieser Matrix $\underline{\underline{G}}$ zu der Jacobimatrix $\underline{\underline{J}}$ einer seriellen Roboterstruktur. Die Benutzung unterschiedlicher Symbole zur Unterscheidung dieser Matrizen wurde hier absichtlich eingeführt [56]. In der Literatur wird vorwiegend die Jacobimatrix eines parallelen Manipulators durch das Symbol $\underline{\underline{J}}$ gekennzeichnet, was aber eher für Verwirrung sorgt [22, 36, 84, 91, 136]. Die Gegenüberstellung der Gleichungen (4.33) und (2.69) zeigt, dass die Jacobimatrix $\underline{\underline{G}}$ nicht auf gleiche Weise wie die Matrix $\underline{\underline{J}}$ genutzt werden kann. Zwischen diesen beiden Matrizen besteht eine duale Beziehung

$$\underline{\underline{J}} \iff \underline{\underline{G}}^+. \quad (4.34)$$

Unter der Annahme, dass $\underline{x}_x \in \mathbb{R}^n$ und $\underline{q}_{ae} \in \mathbb{R}^{n_{ae}}$ jeweils die Koordinatenvektoren im kartesischen und Gelenkraum bezeichnen, wobei sich die Dimensionen $n \neq n_{ae}$ generell unterscheiden, können die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten $\dot{\underline{x}}_x$, $\dot{\underline{q}}_{ae}$ der beiden Konfigurationsräume wie folgt geschrieben werden:

$$\dot{\underline{x}}_x = \underline{\underline{J}} \dot{\underline{q}}_{ae} \iff \dot{\underline{x}}_x = \underline{\underline{G}}^+ \dot{\underline{q}}_{ae}, \quad (4.35)$$

$$\dot{\underline{q}}_{ae} = \underline{\underline{J}}^+ \dot{\underline{x}}_x \iff \dot{\underline{q}}_{ae} = \underline{\underline{G}} \dot{\underline{x}}_x, \quad (4.36)$$

wobei $\underline{\underline{J}}^+$ und $\underline{\underline{G}}^+$ die pseudo-inversen Matrizen bezeichnen. Für die Beschleunigungen $\underline{\underline{\ddot{x}}}_x, \underline{\underline{\ddot{q}}}_{ae}$ gilt

$$\underline{\underline{\ddot{x}}}_x = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{\ddot{q}}}_{ae} + \underline{\underline{\dot{J}}} \underline{\underline{\dot{q}}}_{ae} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\ddot{x}}}_x = \underline{\underline{G}}^+ \underline{\underline{\ddot{q}}}_{ae} + \underline{\underline{\dot{G}}}^+ \underline{\underline{\dot{q}}}_{ae}, \quad (4.37)$$

$$\underline{\underline{\ddot{q}}}_{ae} = \underline{\underline{J}}^+ \underline{\underline{\ddot{x}}}_x + \underline{\underline{\dot{J}}}^+ \underline{\underline{\dot{x}}}_x \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\ddot{q}}}_{ae} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{\ddot{x}}}_x + \underline{\underline{\dot{G}}} \underline{\underline{\dot{x}}}_x. \quad (4.38)$$

Die infinitesimalen Positionsänderungen der jeweiligen Vektoren werden ebenfalls durch Jacobimatrizen miteinander verknüpft:

$$\Delta \underline{\underline{x}}_x = \underline{\underline{J}} \Delta \underline{\underline{q}}_{ae} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \underline{\underline{x}}_x = \underline{\underline{G}}^+ \Delta \underline{\underline{q}}_{ae}, \quad (4.39)$$

$$\Delta \underline{\underline{q}}_{ae} = \underline{\underline{J}}^+ \Delta \underline{\underline{x}}_x \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \underline{\underline{q}}_{ae} = \underline{\underline{G}} \Delta \underline{\underline{x}}_x. \quad (4.40)$$

Wie schon erwähnt, bezeichnet die Jacobimatrix die Abbildung zwischen den Momenten/-Kräften des kartesischen Raumes $\underline{\underline{f}}_x$ und des Gelenkraumes $\underline{\underline{\tau}}_{kae}$. Diese Beziehungen werden durch folgende Formeln ausgedrückt

$$\underline{\underline{f}}_x = \underline{\underline{J}}^{+T} \underline{\underline{\tau}}_{kae} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{f}}_x = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{\tau}}_{kae}, \quad (4.41)$$

$$\underline{\underline{\tau}}_{kae} = \underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{f}}_x \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{\tau}}_{kae} = \underline{\underline{G}}^{+T} \underline{\underline{f}}_x. \quad (4.42)$$

Die Herleitung der Jacobimatrix $\underline{\underline{J}}$ einer seriellen kinematischen Kette wurde in Abschnitt 2.4 bereits ausführlich erläutert. Das Aufstellen der Jacobimatrix eines parallelen Manipulators $\underline{\underline{G}}$ wurde in den Abschnitten 3.4.1 und 4.4.1 präsentiert. Genauere Informationen zu den angegebenen Beziehungen (4.35)-(4.42) können darüber hinaus der zahlreichen Literatur entnommen werden [56, 84, 89, 91, 136].

4.5 Dekomposition der direkten Dynamik

Die direkte Dynamik wird mit Hilfe des *Lagrange-D'Alembert-Formalismus* in einer kompakten Form geschrieben. Diese ist bei der Analyse der Systemeigenschaften vorteilhaft, kann aber bei der Echtzeitberechnung des Modells zu Komplikationen führen. Um dieses Problem zu lösen, wurde ein Verfahren entwickelt, bei dem die direkte Dynamik eines parallelen Manipulators in Form einer Baumstruktur berechnet werden kann. Diese Form ermöglicht eine Verteilung der Gleichungen der direkten Dynamik auf mehrere kleine Gleichungen der einzelnen seriellen kinematischen Ketten und so deren gleichzeitige und parallele Berechnung (engl.

Simultaneous Calculation of the Direct Dynamics - SCDD) [123, 124, 127, 128]. Eine ähnliche Vorgehensweise wurde bei der Berechnung der inversen Dynamik im *Lagrange-D'Alembert-Formalismus*, in Abschnitt 4.3.1, vorgeschlagen. Die Zwangsbedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten werden dabei, ähnlich wie in den *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen erster Art* in Abschnitt 4.2, durch Zwangsmomente/-kräfte eingeführt. Diese verteilte Form reduziert die Rechenleistung, die für die Berechnung der direkten Dynamik nötig ist.

4.5.1 Direkte Dynamik - DD

Die Bewegungsgleichungen der Baumstruktur wurden bereits in Gleichung (4.19) erfasst. Diese Gleichungen werden jetzt in die Bewegungsgleichungen der jeweiligen seriellen kinematischen Ketten zerlegt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_{bi}(\underline{q}_{bi})\ddot{\underline{q}}_{bi} + \underline{\underline{C}}_{bi}(\dot{\underline{q}}_{bi}, \underline{q}_{bi})\dot{\underline{q}}_{bi} + \underline{\eta}_{bi}(\underline{q}_{bi}) \\ + \underline{\underline{J}}_i^T \underline{f}_{bxi} + \underline{\underline{K}}_{bi} \underline{q}_{bi} + \underline{\underline{D}}_{bi} \dot{\underline{q}}_{bi} = \underline{\tau}_{bi}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

für $i = 1 \dots n_a$, wobei $\underline{q}_{bi}^T = [\underline{q}_{ai}^T \ \underline{q}_{pi}^T \ \underline{q}_{ei}^T]$ den Vektor der Koordinaten und $\underline{\tau}_{bi}^T = [\underline{\tau}_{ai}^T \ \underline{\tau}_{pi}^T \ \underline{\tau}_{ei}^T]$ den Vektor der Momente/Kräfte bezeichnen, die mit der i -ten seriellen kinematischen Kette verbunden sind. Der Vektor \underline{f}_{bxi} repräsentiert die externe Kraft, die auf das Ende der i -ten Führungskette einwirkt. Die Gleichungen der direkten Dynamik können folgendermaßen formuliert werden

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{q}}_{bi} = \underline{\underline{M}}_{bi}(\underline{q}_{bi})^{-1} \left(\underline{\tau}_{bi} - \underline{\underline{C}}_{bi}(\dot{\underline{q}}_{bi}, \underline{q}_{bi})\dot{\underline{q}}_{bi} \right. \\ \left. - \underline{\eta}_{bi}(\underline{q}_{bi}) - \underline{\underline{K}}_{bi} \underline{q}_{bi} - \underline{\underline{D}}_{bi} \dot{\underline{q}}_{bi} - \underline{\underline{J}}_i^T \underline{f}_{bxi} \right), \end{aligned} \quad (4.44)$$

für $i = 1 \dots n_a$. Zu den gesuchten Eingangsgrößen der Gleichung (4.44) gehören die auf das Ende der jeweiligen Führungsketten einwirkenden Kräfte \underline{f}_{bxi} und die jeweiligen realen und virtuellen Momente/Kräfte der aktiven $\underline{\tau}_{ai}$ und passiven $\underline{\tau}_{pi}$ Gelenke. Die Eingangsgröße des reduzierten Systems (4.19) und des kompakten parallelen Manipulators (4.20) ist aber, von der externen Kraft am Endeffektor \underline{f}_x abgesehen, der Vektor $\underline{\tau}_k$ der kompakten Antriebsmomente/-kräfte. Die Momente/Kräfte der Baumstruktur ergeben sich aus dem Vektor $\underline{\tau}_k$ gemäß der Formel (4.17) und sie sind voneinander abhängig. Sie stellen gleichzeitig die Momente/Kräfte der Zwangsbedingungen und die Antriebsmomente/-kräfte des parallelen Manipulators dar. Die Momente/Kräfte der elastischen Freiheitsgrade $\underline{\tau}_{ei}$ resultieren aus der mechanischen Beanspruchung der Elemente und werden aus den Materialeigenschaften, wie z.B. der Steifigkeit oder der Dämpfung, bestimmt. Einige dieser Momente/Kräfte

können durch zusätzliche adaptronische Aktoren erzeugt werden. Sie gehören zu den nicht-redundanten Größen. Bevor jedoch die gesuchten Größen berechnet werden können, müssen zunächst die Koordinaten der passiven Freiheitsgrade (4.7), ihre Geschwindigkeiten (4.12) und ihre Beschleunigungen in Abhängigkeit der nicht-redundanten Koordinaten der aktiven und elastischen Freiheitsgrade berechnet werden [12, 122]. Zu diesem Zweck werden die Zwangsbedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten aus der Gleichung (4.8) verwendet. Danach können die virtuellen Momente/Kräfte der passiven Freiheitsgrade des reduzierten Systems ermittelt werden. Für diese Berechnung werden nur solche Zeilen der Matrizen der Baumstruktur (4.43) benötigt, die mit den redundanten Freiheitsgraden verbunden sind

$$\begin{aligned} \underline{\tau}_{pi} = & \underline{M}_{bin_{bp}}(\underline{q}_{bi})\underline{\ddot{q}}_{bi} + \underline{C}_{bin_{bp}}(\underline{\dot{q}}_{bi}, \underline{q}_{bi})\underline{\dot{q}}_{bi} \\ & + \underline{\eta}_{bin_{bp}}(\underline{q}_{bi}) + \underline{K}_{bin_{bp}}\underline{q}_{bi} + \underline{D}_{bin_{bp}}\underline{\dot{q}}_{bi} + \underline{J}_{in_{bp}}^T \underline{f}_{bxi}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

für $i = 1 \dots n_a$, wobei der Index n_{bp} die Anzahl der passiven Freiheitsgrade der i -ten seriellen Führungskette bezeichnet. Anschließend können die Momente/Kräfte $\underline{\tau}_a$ der aktiven Koordinaten aus den beiden Vektoren der Momente/Kräfte $\underline{\tau}_p^T = [\underline{\tau}_{p1}^T \dots \underline{\tau}_{pn_a}^T]$ und $\underline{\tau}_k$ berechnet werden. Zu diesem Zweck wird ein Teil der während der Aufstellung der inversen Dynamik definierten Transformationsmatrix \underline{W} gemäß Gleichung (4.18) eingesetzt

$$\underline{\tau}_a = \underline{\tau}_k - \left(\frac{\partial \underline{q}_p}{\partial \underline{q}_a^T} \right)^T \underline{\tau}_p. \quad (4.46)$$

Für die Berechnung der Momente/Kräfte der aktiven Freiheitsgrade $\underline{\tau}_a$ der Baumstruktur eines elastischen parallelen Manipulators werden, außer dem Vektor $\underline{\tau}_k$, nur die virtuellen Momente/Kräfte $\underline{\tau}_p$ der passiven Freiheitsgrade (4.45) verwendet. Der Einfluss der Momente/Kräfte $\underline{\tau}_e$ der elastischen Freiheitsgrade auf die Bewegung der Baumstruktur wurde bereits während der Berechnung des Vektors $\underline{\tau}_p$ durch die Koordinaten der elastischen Freiheitsgrade berücksichtigt. Gemäß Gleichung (4.10) ist nach dem *D'Alembertschen Prinzip* die verrichtete virtuelle Arbeit der beiden Systeme gleich, so dass die durch die Momente/Kräfte $\underline{\tau}_a$ und $\underline{\tau}_p$ erzeugte Bewegung der Baumstruktur der Bewegung des kompakten parallelen Manipulators entspricht. Die Arbeitsbedingungen der beiden Systeme unterscheiden sich aber in diesem Fall, was eine unterschiedliche Kraftverteilung in der Roboterstruktur zur Folge hat. Sie müssen deswegen für beide Systeme gleich sein. Die Forderung nach gleichen Arbeitsbedingungen impliziert, dass die kompakten Antriebsmomente/kräfte $\underline{\tau}_k$ die aktiven Gelenke der Baumstruktur ansteuern sollen, so wie das bei der kompakten Roboterstruktur (4.20)

der Fall ist. Die Momente/Kräfte der passiven Freiheitsgrade sind dabei gleich null

$$\begin{aligned}\underline{\tau}_a &= \underline{\tau}_k, \\ \underline{\tau}_p &= \underline{0}.\end{aligned}\tag{4.47}$$

Um diese Bedingung (4.47) zu erfüllen, müssen neue Zwangsmomente/kräfte der Baumstruktur berechnet werden. Diese müssen dann zusammen mit den neuen Antriebsmomenten/kräften in den Gleichungen der jeweiligen i -ten seriellen Führungskette der Baumstruktur (4.44) substituiert werden. Zu diesem Zweck wird die Differenz zwischen den Momenten/kräften der aktiven Gelenke der Baumstruktur $\underline{\tau}_a$ und des kompakten parallelen Manipulators $\underline{\tau}_k$ ermittelt. Sie beträgt

$$\Delta \underline{\tau}_a = \underline{\tau}_k - \underline{\tau}_a = \left(\frac{\partial q_p}{\partial q_a^T} \right)^T \underline{\tau}_p.\tag{4.48}$$

Die Zwangsmomente/kräfte für die i -te Führungskette können dann gemäß der Formel (4.41) unter Beachtung der Gleichungen (4.45) und (4.48) sowie der Bedingung (4.47) folgendermaßen berechnet werden

$$\hat{f}_{bxi} = \underline{\underline{J}}_{iap}^{+T} \left[\Delta \underline{\tau}_{ai} - \underline{\tau}_{pi} \right],\tag{4.49}$$

für $i = 1 \dots n_a$, wobei $\underline{\underline{J}}_{iap}$ die Jacobimatrix der aktiven und passiven Freiheitsgrade der i -ten seriellen Führungskette bezeichnet. Sie müssen für jede serielle kinematische Kette berechnet werden und stellen ein Teil der Momente/Kräfte dar, die auf das Ende der jeweiligen i -ten Führungskette einwirken. Nach den Beziehungen der Statik (4.28) und (4.30) werden nun die auf die jeweiligen Führungsketten einwirkenden externen Momente/Kräfte berechnet

$$\underline{f}_{bx} = \underline{U} \underline{S}^{-1} \underline{f}_x,\tag{4.50}$$

wobei $\underline{f}_{bx}^T = \left[\underline{f}_{bx1}^T \dots \underline{f}_{bxi}^T \dots \underline{f}_{bxn_a}^T \right]$. Sie können jetzt mit den schon berechneten Zwangsmomenten/kräften verbunden werden

$$\underline{f}_{bxi} = \underline{f}_{bxi} + \hat{f}_{bxi},\tag{4.51}$$

für $i = 1 \dots n_a$. Diese neuen Zwangsmomente/Kräfte (4.51) und Antriebsmomente/kräfte (4.47) führen zu gleichen Bewegungen der Führungsketten und zu einer gleichen Momenten/kraftverteilung in der Baumstruktur wie bei einem kompakten originalen elastischen parallelen Manipulator.

Rekapitulierend kann das neue Verfahren (SCDD) in folgenden Schritte zusammengefasst werden:

1. *Transformation des Modells* in ein reduziertes System und die separate Berechnung der direkten Dynamik der einzelnen seriellen kinematischen Ketten (4.44). Um diese Gleichungen berechnen zu können, müssen zunächst die Zwangsmomente/Kräfte und die Antriebsmomente/kräfte der Baumstruktur ermittelt werden.
2. *Berechnung der Trajektorie* der passiven Freiheitsgrade aus den nicht-redundanten Koordinaten der aktiven und elastischen Freiheitsgrade, basierend auf den Zwangsbedingungen der geschlossenen kinematischen Ketten der parallelen Struktur.
3. *Berechnung der virtuellen Momente/Kräfte* der passiven Freiheitsgrade mit Hilfe der Gleichungen der inversen Dynamik der seriellen kinematischen Ketten (4.45) und anschließende Bestimmung der Differenzen zwischen den Antriebsmomenten/kräften der aktiven Gelenke der Baumstruktur und des kompakten parallelen Manipulators (4.48).
4. *Berechnung der Zwangsmomente/kräfte* für jede einzelne serielle Führungskette (4.49).
5. *Verbindung der Zwangsmomente/kräfte* mit den externen auf das Ende der jeweiligen Führungskette einwirkenden Momenten/Kräften (4.51). Die Antriebsmomente/kräfte der Baumstruktur (4.44) werden durch die Antriebsmomente/kräfte des kompakten parallelen Manipulators gemäß (4.47) ersetzt.

4.5.2 Eigenschaften

Im vorgestellten Verfahren wurde die direkte Dynamik eines parallelen Manipulators in die Gleichungen der direkten Dynamik seiner einzelnen seriellen Führungsketten zerlegt, ähnlich der Idee des reduzierten Systems im *Lagrange-D'Alembert Formalismus*. Das Ziel dieser Umformulierung war die Beschleunigung der Berechnung der direkten Dynamik und insbesondere der Invertierung der Trägheitsmatrix, die den meisten Aufwand bei dieser Berechnung verursacht. Das für die numerische Invertierung der Matrizen am häufigsten benutzte *Gaußsche Eliminationsverfahren* weist eine Komplexität von $O(n^3)$ auf [35]. Bei der Annahme eines elastischen symmetrischen parallelen Manipulators und globaler rotatorischer Freiheitsgrade, was aber keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt, kann diese Komplexität, für das nach dem *Lagrange-D'Alembert-Formalismus* (L-D'A) hergeleitete kompakte Modell, in der Form $O((n_a + n_a n_{be})^3)$ erfasst werden. Dabei bezeichnet n_{be} die Anzahl der elastischen Freiheitsgrade in einer seriellen Führungskette. Die verteilte Berechnung nach der neuen Methode (SCDD) ermöglicht es, die Komplexität auf $O(n_a(1 + n_{bp} + n_{be})^3)$ zu senken, wobei

n_{bp} die Anzahl der passiven Freiheitsgrade in einer seriellen kinematischen Kette bezeichnet. Die Vermeidung der Multiplikation zwischen n_a und n_{be} unter der dritten Potenz führt hier zu einer Reduktion der Rechenleistung, was insbesondere für die komplexen Systeme mit der Bedingung $n_{bp} \ll n_{be}$ nicht zu unterschätzen ist. Die Berechnung der direkten Dynamik von komplexen Systemen im Gelenkraum wird auf diese Weise deutlich beschleunigt, da mehrere kleine Matrizen schneller als eine große Matrix invertiert werden können. Zusätzlich kann diese Berechnung bei einem Multikernprozessor parallel durchgeführt werden. In Tabelle 4.1 wurde die Komplexität der Invertierung der Trägheitsmatrix anhand der Gesamtzahl der nötigen arithmetischen Operationen, für drei verschiedene parallele Manipulatoren aus dem Sonderforschungsbereich 562 verglichen [43].

	n_a	n_{bp}	n_{be}	SCDD	L-D'A	Reduktion
FÜNFGELENK	2	1	1	54	64	16 %
HEXA	6	2	1	384	1728	78 %
TRIGLIDE	3	2	1	162	729	78 %

Tabelle 4.1: Komplexität der Trägheitsmatrixinvertierung

Dieser Vergleich zeigt eine beträchtliche Reduktion der Komplexität bei dem vorgeschlagenen Verfahren, sogar schon für nur einen elastischen Freiheitsgrad $n_{be} = 1$ pro Führungskette. Dies ermöglicht die Modellierung elastischer Robotererelemente mit einem höheren Detaillierungsgrad, was aus der Sicht der Genauigkeit des Modells vorteilhaft ist.

Die Berechnung der direkten Dynamik starrer paralleler Manipulatoren kann ebenfalls von der neuen Methode profitieren. Die Form des reduzierten Systems ermöglicht es, die Anzahl der arithmetischen Operationen niedrig zu halten, da die Transformationen der Gleichungen (4.21)-(4.26), welche diese Zahl erhöhen würden, vermieden werden. Diese Problematik wurde für das Starrkörpermodell des parallelen Manipulators FÜNFGELENK untersucht [124]. Dabei wurden zwei Modelle verglichen. Das erste Modell wurde mit der neuen Methode (SCDD) und das zweite Modell mit der Standardmethode nach dem *Lagrange-D'Alembert-Formalismus* (L-D'A) aufgestellt. Die genaue Form des Modells ist bei dieser Analyse ohne Belang, da es sich hier um einen Vergleich zweier Verfahren für dasselbe Modell handelt. Die symbolischen Gleichungen der direkten Dynamik wurden für die beiden Modelle mit dem Programm Mathematica® hergeleitet und vereinfacht. Alle nötigen Operationen und Transformationen, die zur Berechnung der direkten Dynamik nötig waren, wurden berücksichtigt.

Die Ergebnisse wurden in Tabelle 4.2 gesammelt. Sie zeigen eine beträchtliche Reduktion der Rechenleistung für jede Art der arithmetischen Operation, ausgenommen die Division

Art der Operation	Anzahl der Operationen		Reduktion
	SCDD	L-D'A	
+	192	670	71 %
−	80	302	74 %
*	432	2482	83 %
/	38	36	−6 %

Tabelle 4.2: Reduktion der arithmetischen Operationen

(Erhöhung um 6 %). Besonders die Reduktion der Multiplikationen und der Divisionen ist für die gesamte Effizienz der Modellberechnung von Bedeutung, da die numerischen Prozessoren (CPU oder DSP) prinzipiell für diese Art der arithmetischen Operationen die meisten maschinellen Schritte benötigen. In dem hier diskutierten Fall wurde eine Reduktion der Multiplikationen um 83 %, bei gleichzeitiger Erhöhung der Divisionen um nur 6 %, erreicht. Das bestätigt die Anwendbarkeit dieses Verfahrens auch für parallele Starrkörperroboter.

4.5.3 Verifikation der Methode

Die neue Methode zur verteilten Berechnung der direkten Dynamik (SCDD) wurde mit der Standardmethode nach dem *Lagrange-D'Alembert Formalismus* (L-D'A) verglichen. Dieser Vergleich wurde auf der Basis eines Modells des ebenen elastischen parallelen Manipulators FÜNFGELENK durchgeführt. In diesem Modell wurde eine konzentrierte Elastizität von $k_{14} = k_{24} = 5,464 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ in jedem der beiden oberen Arme des Roboters angenommen, gezeigt in Bild 4.2. Q_{11} und Q_{21} bezeichnen dabei die beiden Antriebe.

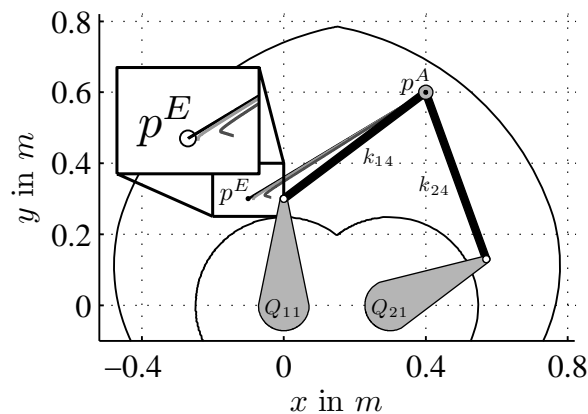


Bild 4.2: Vergleich der Trajektorien - FÜNFGELENK

Die anderen Parameter des Modells sind irrelevant, da es sich hier um einen Vergleich zweier Verfahren handelt. Als Test-Trajektorie wurde eine gerade Linie (ein gerader Pfad) zwischen zwei Punkten p^A und p^E gewählt. Die Entfernung der beiden Punkte ermöglichte es dem Roboter eine maximale Beschleunigung von 100 m/s^2 und eine maximale Geschwindigkeit von 5 m/s zu erreichen. Die Modelle der elastischen Manipulatoren wurden durch die Momente/-Kräfte angesteuert, welche mit dem Starrkörpermodell erzeugt wurden. Die Regelung war ausgeschaltet, um ihren Einfluss auf die Ergebnisse auszuschließen. Die schwarze Linie in Bild 4.2 stellt die Referenztrajektorie dar. Die dunkelgraue Linie bezeichnet die aus dem kompakten Modell L-D'A und die hellgraue Linie die nach der neuen Methode SCDD berechnete Trajektorie. Wie aus Bild 4.2 entnommen werden kann, sind die beiden Modelle der Referenztrajektorie mit vergleichbarer Genauigkeit gefolgt. Um einen besseren Einblick in dieses Ergebnis zu gewinnen, wurden die beiden Vergleichstrajektorien durch die in den beiden oberen Armen des Manipulators induzierten Kräfte dargestellt. Der Vergleich ist in Bild 4.3 zu sehen, wobei f_{12} die Kraft im linken oberen und f_{22} die Kraft im rechten oberen Arm bezeichnen.

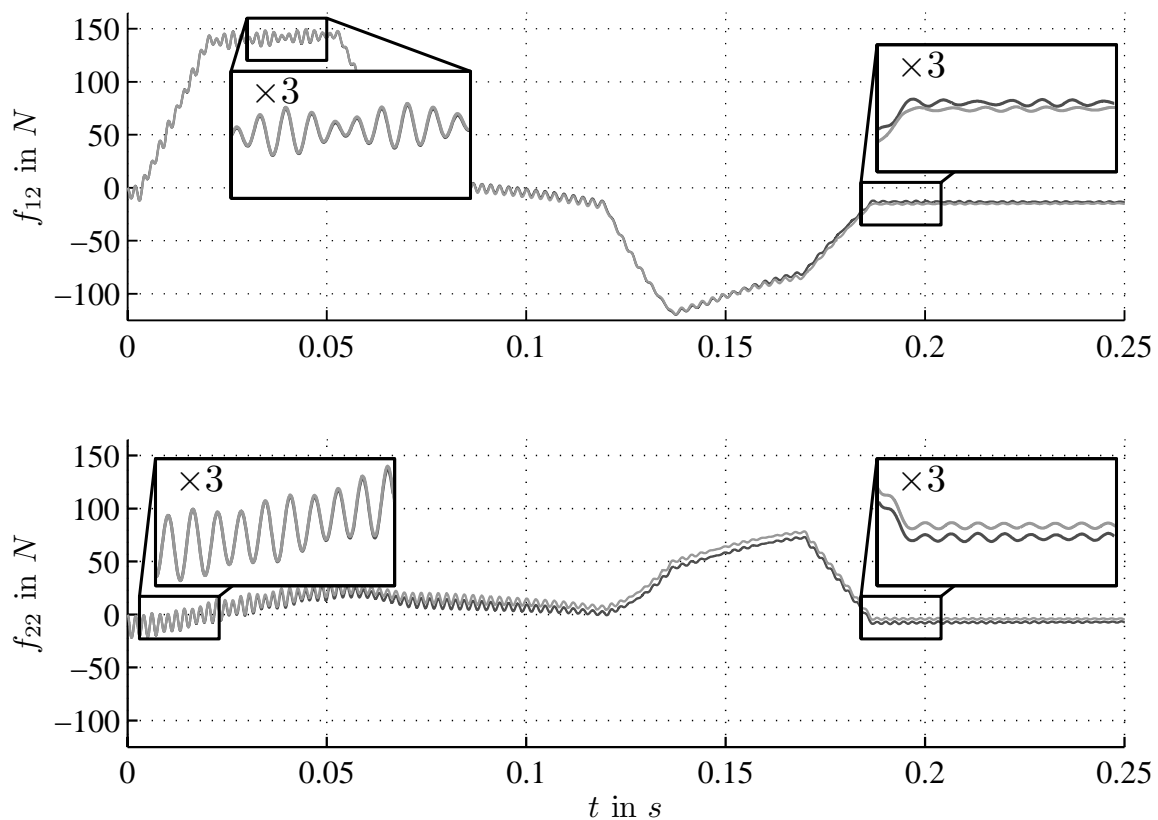


Bild 4.3: Vergleich der Kräfte in den Armen des Manipulators - FÜNFGELENK

Die Beobachtung der Kräfte zeigt eine gute Übereinstimmung der beiden Modelle, deren dynamisches Verhalten in Frequenz, Amplitude und Phase vergleichbar ist. Es kann aber auch

eine Differenz, sowohl zwischen den Trajektorien im kartesischen Raum, als auch zwischen den Kräften der beiden elastischen Modelle der direkten Dynamik, beobachtet werden. Diese Differenz ist am Anfang der Simulation gleich null und ändert sich im Laufe der Berechnungen. Die Ursache für diese Diskrepanz liegt bei der numerischen Genauigkeit und dem Abtastintervall der Berechnungen. Da die Gleichungen in der neuen Methode verteilt sind, werden sie in verschiedenen Modulen und Funktionen berechnet. Die Zwischenergebnisse werden dadurch gerundet und fließen damit nur mit einer endlichen Genauigkeit in die weiteren Berechnungen ein. Die Größe des Abtastintervalls beeinflusst dagegen die Genauigkeit der numerischen Integration. Die Wahl eines genauen Integrationsverfahrens ist hier von Vorteil. In den unter Matlab[®] durchgeführten Simulationen wurde das Integrationsverfahren nach *Dormand-Prince: ode45* verwendet. Die erwähnten Fehler führen bei der SCDD Methode in dem hier analysierten Fall zu einer Situation, in der die beiden seriellen Führungsketten auseinander driften. Diese Entfernung kann gleichzeitig als ein Maß für den numerischen Fehler dienen. Bild 4.4 zeigt die Änderung der Entfernung der Endpunkte der beiden kinemati-

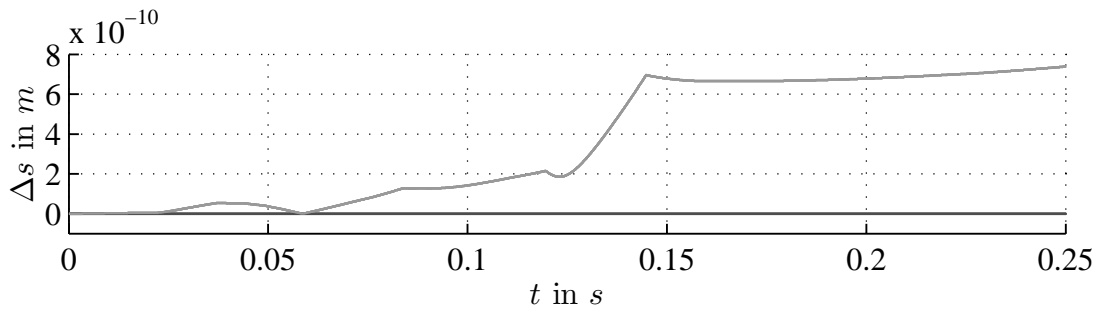


Bild 4.4: Numerischer Fehler der SCDD Methode

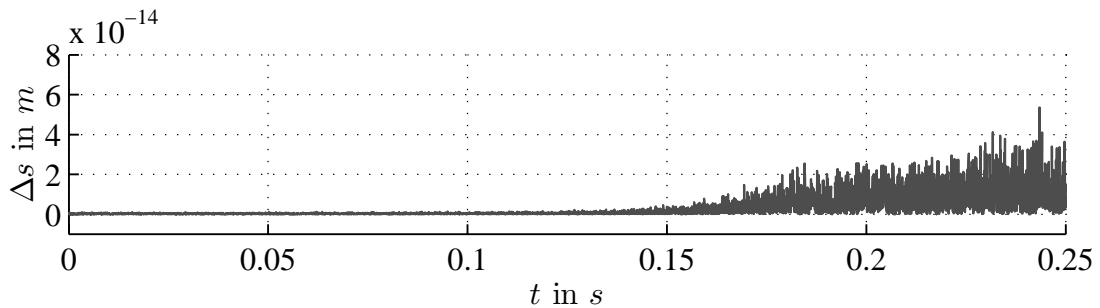


Bild 4.5: Numerischer Fehler der L-D'A Methode

schen Ketten während der Simulation. Die dunkelgraue Linie $\Delta s < 7 \cdot 10^{-14} \text{ m}$, zusätzlich in Bild 4.5 dargestellt, bezeichnet die Entfernung der beiden Ketten des Modells nach dem L-D'A Verfahren. Sie ändert sich nur geringfügig. Der Fehler im Modell nach der SCDD

Methode wurde durch hellgraue Linie gekennzeichnet. Im Idealfall sollte sich diese Differenz wie im Referenzfall (L-D'A Verfahren) verhalten, d.h. sie sollte vergleichbar mit der numerischen Genauigkeit der Berechnungen sein und der numerische Fehler sollte sich nicht akkumulieren. Der numerische Fehler stellt deswegen einen Nachteil dieser neuen Methode dar. Er disqualifiziert sie aber nicht. Im Bereich der numerischen Methoden sind Algorithmen bekannt, die sich mit der numerischen Stabilität der Berechnungen und Erhöhung der numerischen Genauigkeit beschäftigen [8]. Dieses neue Verfahren kann dementsprechend um diese Methoden ergänzt werden. Abgesehen von der numerischen Genauigkeit bestätigen die präsentierten Ergebnisse sowohl die Richtigkeit der analytischen Vorgehensweise, als auch das Potenzial und die Effizienz der neuen Methode zur verteilten Berechnung der direkten Dynamik (SCDD).

4.6 Dynamikgleichung in den Aufgabenkoordinaten

Die in den vorangegangenen Abschnitten hergeleiteten Modelle wurden in verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q}_{ae} \in \mathbb{R}^{n_{ae}}$ - *Gelenkkordinaten* - formuliert. Diese Form ist bei der Aufstellung des Modells von Vorteil, da ein Teil der Zwangsbedingungen automatisch berücksichtigt werden kann. Sie kann jedoch zu Modellen höherer Ordnung führen, insbesondere bei der Existenz elastischer Deformationen. Außerdem können die Eigenschaften des Manipulators in seinem kartesischen Arbeitsraum in dieser Form nicht ohne weiteres bestimmt werden. Abhängig von der Fragestellung kann es daher notwendig werden, das Modell in die Koordinaten des kartesischen Raumes $\underline{x}_x \in \mathbb{R}^n$ - *Aufgabenkoordinaten* - zu transformieren. Die Dimensionen der Matrizen hängen dabei von der Zahl der kartesischen Freiheitsgrade des Manipulators ab und das sind maximal sechs Freiheitsgrade: drei Translationen und drei Rotationen.

Die in Abschnitt 4.4.2 angegebenen kinetischen Beziehungen (4.35)-(4.42) transformieren die Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte und Momente zwischen dem Gelenkraum und dem kartesischen Raum. Mit Hilfe dieser Beziehungen können auch die Dynamikgleichungen in den kartesischen Konfigurationsraum transformiert werden. Zu diesem Zweck wird die Gleichung (4.20) linksseitig mit der transponierten Jacobimatrix multipliziert

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G}}^T \left(\underline{\underline{M}}_k(\underline{q}_b) \underline{\underline{\ddot{q}}}_{ae} + \underline{\underline{C}}_k(\underline{\dot{q}}_b, \underline{q}_b) \underline{\underline{\dot{q}}}_{ae} + \underline{\underline{\eta}}_k(\underline{q}_b) \right. \\ \left. + \underline{\underline{K}}_k \underline{q}_{ae} + \underline{\underline{D}}_k \underline{\dot{q}}_{ae} \right) = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{\tau}}_k. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Hierbei handelt es sich um eine Kraft-/Momententransformation (4.41) zwischen den bei-

den Räumen. Nun müssen noch die Vektoren des Gelenkraumes durch die Vektoren des kartesischen Raumes gemäß den Beziehungen (4.35)-(4.40) ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G}}^T \left(\underline{\underline{M}}_k(q_b) \left(\underline{\underline{G}} \ddot{x}_x + \dot{\underline{\underline{G}}} \dot{x}_x \right) + \underline{\underline{C}}_k(\dot{q}_b, q_b) \underline{\underline{G}} \dot{x}_x + \underline{\underline{\eta}}_k(q_b) \right. \\ \left. + \underline{\underline{K}}_k \underline{\underline{G}} \Delta x_x + \underline{\underline{D}}_k \underline{\underline{G}} \dot{x}_x \right) = \underline{\underline{G}}^T \tau_k. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Nach der Entwicklung und Sortierung der Ausdrücke können die Matrizen im kartesischen Raum durch folgende Zusammenhänge bestimmt werden:

$$\underline{\underline{M}}_x = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{M}}_k \underline{\underline{G}} \in \mathbb{R}^{(n \times n)}, \quad (4.54)$$

$$\underline{\underline{C}}_x = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{M}}_k \dot{\underline{\underline{G}}} + \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{C}}_k \underline{\underline{G}} \in \mathbb{R}^{(n \times n)}, \quad (4.55)$$

$$\underline{\underline{\eta}}_x = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{\eta}}_k \in \mathbb{R}^{(n \times 1)}, \quad (4.56)$$

$$\underline{\underline{K}}_x = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{K}}_k \underline{\underline{G}} \in \mathbb{R}^{(n \times n)}, \quad (4.57)$$

$$\underline{\underline{D}}_x = \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{D}}_k \underline{\underline{G}} \in \mathbb{R}^{(n \times n)}, \quad (4.58)$$

$$\underline{\underline{f}}_x = \underline{\underline{G}}^T \tau_k \in \mathbb{R}^{(n \times 1)}. \quad (4.59)$$

Die Dynamikgleichung des Manipulators im kartesischen Raum kann in der Form

$$\underline{\underline{M}}_x \ddot{x}_x + \underline{\underline{C}}_x \dot{x}_x + \underline{\underline{\eta}}_x + \underline{\underline{K}}_x x_x + \underline{\underline{D}}_x \dot{x}_x = \underline{\underline{f}}_x \quad (4.60)$$

geschrieben werden. Obwohl diese Gleichung in den kartesischen Koordinaten ausgedrückt ist, ist es wegen der Nichtlinearität der inversen Kinematik praktisch nicht möglich, die Matrizen dieser Gleichung allein in Abhängigkeit der kartesischen Koordinaten zu formulieren. Ein weiteres Problem liegt in der Anwesenheit der elastischen Freiheitsgrade. Sie gehören nämlich zu den unabhängigen Größen, die aus den Freiheitsgraden der aktiven und passiven Gelenke nicht ermittelt werden können. Sie müssen entweder gemessen oder durch einen Beobachter geschätzt werden. Dies führt zu der Situation, dass parallel zu dem Dynamikmodell in Aufgabenkoordinaten noch ein Modell in Gelenkkoordinaten berechnet werden muss, um die elastischen Zustände zu bestimmen. Außerdem kann diese Darstellung des Modells in der Nähe der Singularitäten Probleme verursachen, wobei die Eigenwerte der Jacobimatrizen sehr hohe und stark unterschiedliche Werte erreichen können. Komplikationen bei Steuerung und Regelung des Manipulators können die Folge sein.

4.7 Analyse der Eigenschaften der Roboterstruktur

Die dynamischen Eigenschaften der seriellen und parallelen Manipulatoren werden, zusätzlich zu den Eigenschaften der Antriebe, durch die Eigenschaften ihrer mechanischen Struktur charakterisiert, die auch damit Gegenstand der Optimierung beim Roboterentwurf sind [56, 68, 84]. Diese Eigenschaften beschreiben im Allgemeinen die Fähigkeit des Manipulators, sowohl zur Erzeugung maximaler Beschleunigungen und Kräfte/Momente in beliebiger Richtung, als auch bezüglich des Widerstands gegen externe Einwirkungen. Auf Grund der Nichtlinearität der Kinematik und dadurch auch der Dynamik fast jedes parallelen Manipulators sind diese Eigenschaften konfigurationsabhängig und ändern sich über den gesamten Arbeitsraum. Aus Sicht der Schwingungsanalyse sind prinzipiell zwei dieser Eigenschaften von Bedeutung: Gemäß den Formeln (2.30) und (2.74) sind das die Trägheit und die Steifigkeit der Roboterstruktur, die im dämpfungsfreien Fall bzw. unter Annahme der geschwindigkeitsproportionalen modalen Dämpfung (2.48) die Parameter der Schwingung definieren.

4.7.1 Kraftellipsoiden

Die Steifigkeit der Roboterstruktur kann entweder im Gelenkraum (4.24) oder im kartesischen Raum (4.57) angegeben werden. Sie hängt von der Steifigkeit der einzelnen Elemente und der Konfiguration des Manipulators ab [7, 21, 22, 36, 54, 84]. Die Beschreibung im Gelenkraum ist bei der Modellierung und der Identifikation von Vorteil. Bei der Regelung dagegen kann sich die kompakte Form im kartesischen Raum als vorteilhaft erweisen, wo gezielt die Steifigkeit der Struktur in einer gewünschten Raumrichtung berechnet werden kann. Diese Möglichkeit kann ebenfalls bei der Bahnplanung genutzt werden. Die Kenntnis der Steifigkeit erlaubt nämlich eine optimale Konfiguration des Manipulators für einen beliebigen Punkt im Arbeitsraum hinsichtlich der Krafterzeugung und Kraftresistenz zu bestimmen. Zur Beschreibung der Struktursteifigkeit wird ein Kraftellipsoid verwendet. Er wird ausschließlich für Manipulatoren mit nur einem Typ von Gelenken definiert [136]. Die Steifigkeit wird dabei durch die Kraft charakterisiert, welche notwendig ist, um am Endeffektor eine Einheitsdeformation der Struktur $(\Delta \underline{x})^T (\Delta \underline{x}) = 1$ hervorzurufen. Sie wird für eine gegebene Konfiguration des Manipulators durch ein Kraftellipsoid beschrieben

$$\underline{f}_x^T \underline{N}_x^T \underline{N}_x \underline{f}_x = 1, \quad (4.61)$$

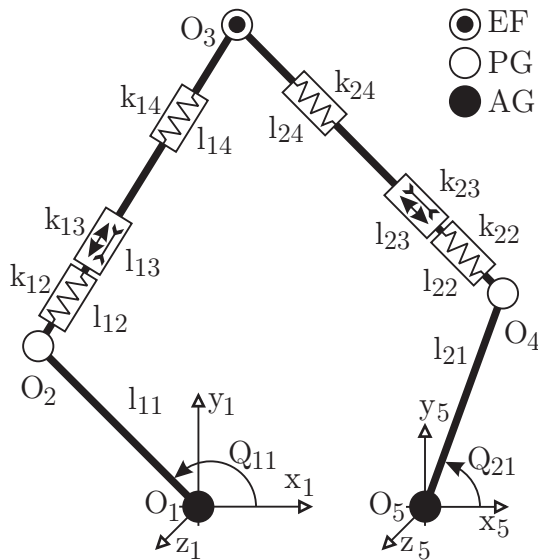
wobei $\underline{N}_x = \underline{K}_x^{-1}$ die Nachgiebigkeitsmatrix (engl. compliance matrix) darstellt. Diese Matrix wird folgendermaßen definiert:

$$\underline{\underline{N_x}} = \underline{\underline{G^+}} \underline{\underline{K_k^{-1}}} \underline{\underline{G^{+T}}}. \quad (4.62)$$

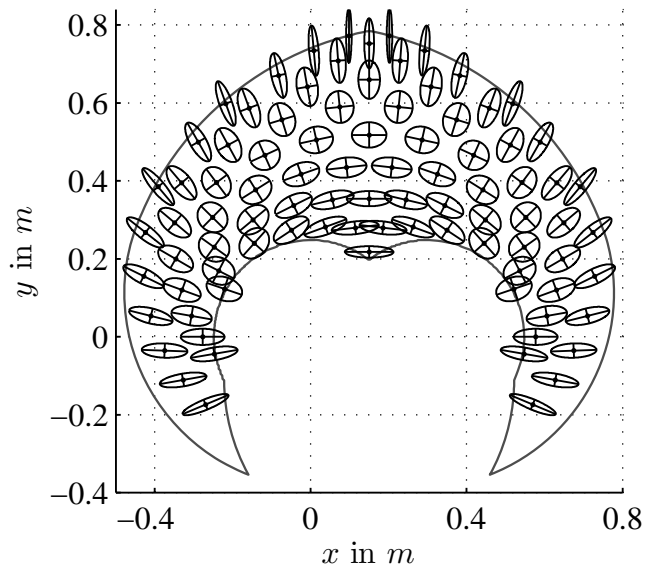
Das Produkt $\underline{\underline{N_x^T}} \underline{\underline{N_x}}$ ist im Arbeitsraum symmetrisch und positiv semidefinit. Die Eigenwerte sind reell, was ebenfalls reelle Werte für die Lösung erwarten lässt. Die Eigenvektoren sind orthogonal und stimmen mit den Hauptachsen des Ellipsoids überein. Die Längen der Hauptachsen sind gleich den reziproken Werten der quadratischen Wurzeln der Eigenwerte des Produktes $\underline{\underline{N_x^T}} \underline{\underline{N_x}}$. Die minimale und maximale Kraft, welche eine Einheitsdeformation erzeugen kann, beträgt

$$f_{min} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}}}, \quad f_{max} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}}, \quad (4.63)$$

wobei λ_{max} und λ_{min} jeweils den maximalen und minimalen Eigenwert des Produktes der Nachgiebigkeitsmatrizen bezeichnet. Da die Kraft gemäß den Gleichungen (2.70) und (4.60) gleich dem Produkt aus Steifigkeit und Deformation ist, wobei hier die Deformation im Betrag gleich eins ist, ist diese Kraft in einer gegebenen Richtung gleich dem Betrag der resultierenden Steifigkeit. Das Kraftellipsoid charakterisiert die Steifigkeitseigenschaften der Roboterstruktur für eine gegebene Konfiguration.



(a) Steifigkeitsverteilung am FÜNFGELENK



(b) Kraftellipsen

Bild 4.6: Kraftellipsen am parallelen Manipulator FÜNFGELENK

Es wurde für den parallelen Manipulator FÜNFGELENK eine Steifigkeitsanalyse am Modell durchgeführt. Weiter wurde angenommen, dass der Manipulator planar und zweidimensional

ist. Die Elastizitäten/Steifigkeiten befinden sich nur in den oberen Armen des Roboters, gezeigt in Bild 4.6(a). Der Versatz in z -Richtung zwischen den beiden Führungsketten wird vernachlässigt. Die Parameter, welche zur Berechnung der Steifigkeits-/Nachgiebigkeitsmatrizen relevant sind, wurden in der Tabelle 4.3 zusammengefasst. Dabei bezeichnen k_{13} und k_{23} die

Parameter	Wert	Einheit
$l_{11} = l_{21}$	300	mm
$l_{12} = l_{22}$	16	mm
$l_{13} = l_{23}$	80	mm
$l_{14} = l_{24}$	404	mm
$k_{12} = k_{22}$	$4,222 \cdot 10^9$	N/m
$k_{13} = k_{23}$	-	N/m
$k_{14} = k_{24}$	$5,464 \cdot 10^6$	N/m

Tabelle 4.3: Parameter des FÜNFGELENKES - I

Steifigkeiten der Piezoaktoren, welche letztendlich von den Reglerparametern abhängig sind, so dass sie in dieser Analyse nicht berücksichtigt wurden. Die Steifigkeit der Längsdeformation eines Piezosensors wurde durch $k_{12} = k_{22}$ und die des elastischen Stabes durch $k_{14} = k_{24}$ bezeichnet. Die Längen der einzelnen Elemente wurden durch l_{ij} markiert. In Bild 4.6(b) sind die im Arbeitsraum des FÜNFGELENKES generierten Kraftellipsen dargestellt. Die Hauptachsen der Ellipsen sind durch die inneren Linien gekennzeichnet. Diese Kraftellipsen zeigen die Abhängigkeit der Roboterstruktursteifigkeit von der Konfiguration und der Raumrichtung. Die Steifigkeit für fast jede Pose hängt stark von der Raumrichtung ab, was am Rande des Arbeitsraumes besonders auffällig ist. Ein wichtiger Parameter ist in diesem Kontext die Konditionszahl (engl. condition number), welche das Verhältnis zwischen dem maximalen und dem minimalen Wert der Ellipse darstellt

$$\kappa = \frac{\sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\lambda_{min}}}. \quad (4.64)$$

Im Idealfall eines isotropen Kennfeldes ist dieser Index gleich eins. Die Steifigkeit ist dann für einen im Arbeitsraum gegebenen Punkt von der Raumrichtung unabhängig, oder sogar für den ganzen Arbeitsraum gleich. Um die Änderung der Steifigkeit im Arbeitsraum übersichtlicher darzustellen, wurden die Kennfelder der Steifigkeit in der x - und y -Richtung generiert. Sie sind in den Bildern 4.7(a) und 4.7(b) jeweils gezeigt.

Die Steifigkeit wurde dabei aus der Formel

$$k_{xy}^{DIR} = \sqrt{\underline{f_x^T} \underline{N_x^T} \underline{N_x} \underline{f_x}}^{-1} \quad (4.65)$$

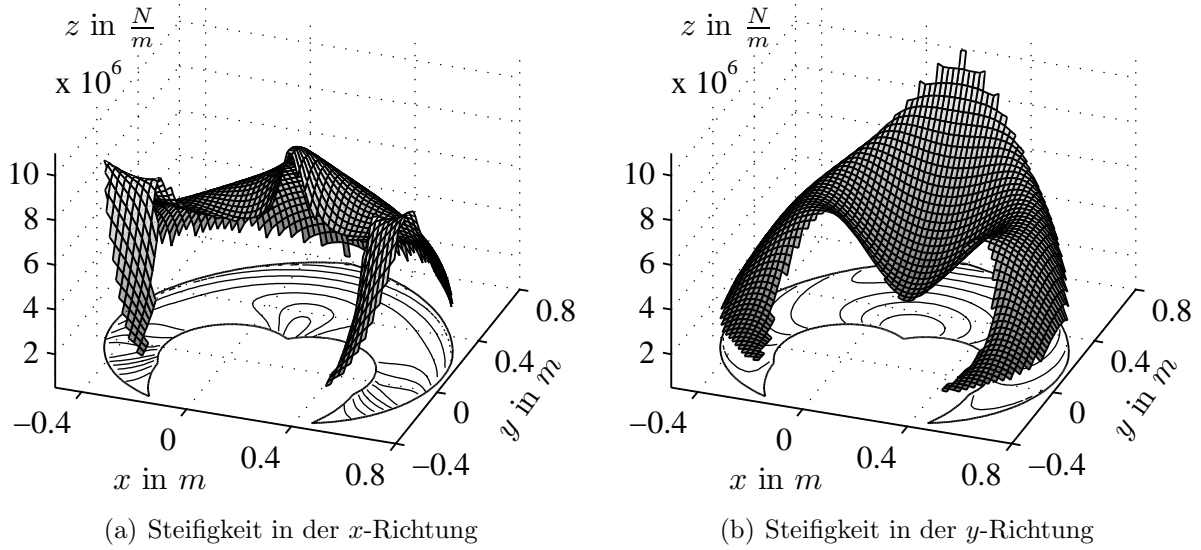


Bild 4.7: Kennfelder der Steifigkeit am parallelen Manipulator FÜNFGELENK

ermittelt. Damit kann die Steifigkeit in jeder beliebigen Richtung berechnet werden. Der Vektor \underline{f}_x legt die Raumrichtung fest und seine Länge $\|\underline{f}_x\| = 1$ ist gleich eins. In manchen Fällen kann es von Vorteil bzw. notwendig sein, ein entsprechendes Feld für jede einzelne Schwingungsmoden separat zu generieren, um sie dann getrennt analysieren zu können.

4.7.2 Trägheitsellipsoiden

Die Trägheit des Manipulators kann analog zur Steifigkeit im Gelenkraum (4.21) und im kartesischen Raum (4.54) dargestellt werden [91, 125, 136]. Abhängig von der Aufgabe kann eine der beiden Darstellungen vorteilhaft sein. Sie kann auf ähnliche Weise wie bei der Steifigkeit durch ein Ellipsoid beschrieben werden. Die Trägheit wird dabei durch die Beschleunigung charakterisiert, die notwendig ist, um eine Einheitskraft $(\Delta \underline{f}_x)^T (\Delta \underline{f}_x) = 1$ am Endeffektor der Roboterstruktur zu erzeugen [6, 91]. Sie wird für eine gegebene Konfiguration des Manipulators durch ein Ellipsoid der generalisierten Trägheit (engl. generalized inertia ellipsoid) beschrieben

$$\underline{\ddot{x}}_x^T \underline{\underline{M}}_x^T \underline{\underline{M}}_x \underline{\ddot{x}}_x = 1. \quad (4.66)$$

Die Inverse der Trägheitsmatrix $\underline{\underline{M}}_x^{-1}$ wird dabei als mechanische Impedanzmatrix (engl. mechanical impedance matrix) bezeichnet und folgendermaßen definiert

$$\underline{\underline{M}}_x^{-1} = \underline{\underline{G}}^+ \underline{\underline{M}}_k^{-1} \underline{\underline{G}}^{+T}. \quad (4.67)$$

Das Produkt $\underline{\underline{M_x^T M_x}}$ ist im Arbeitsraum symmetrisch und positiv definit. Die Eigenwerte sind reell, was ebenfalls reelle Werte für die Lösung erwarten lässt. Die Eigenvektoren sind orthogonal und stimmen mit den Hauptachsen des Ellipsoids überein. Die Längen der Hauptachsen sind gleich den reziproken Werten der quadratischen Wurzeln der Eigenwerte des Produktes $\underline{\underline{M_x^T M_x}}$. Die minimale und maximale Beschleunigung, welche einer Einheitskraft entspricht, kann auf ähnliche Weise wie in Gleichung (4.63) ermittelt werden. Die erzeugte Kraft ist gleich dem Produkt aus Trägheit und Beschleunigung, gemäß den Gleichungen (2.70) und (4.60), wobei die Kraft betragsmäßig gleich eins ist. Dadurch ist die Trägheit in einer gegebenen Richtung reziprok proportional zu der Beschleunigung. Das generalisierte Trägheitsellipsoid charakterisiert die Trägheitseigenschaften der Roboterstruktur.

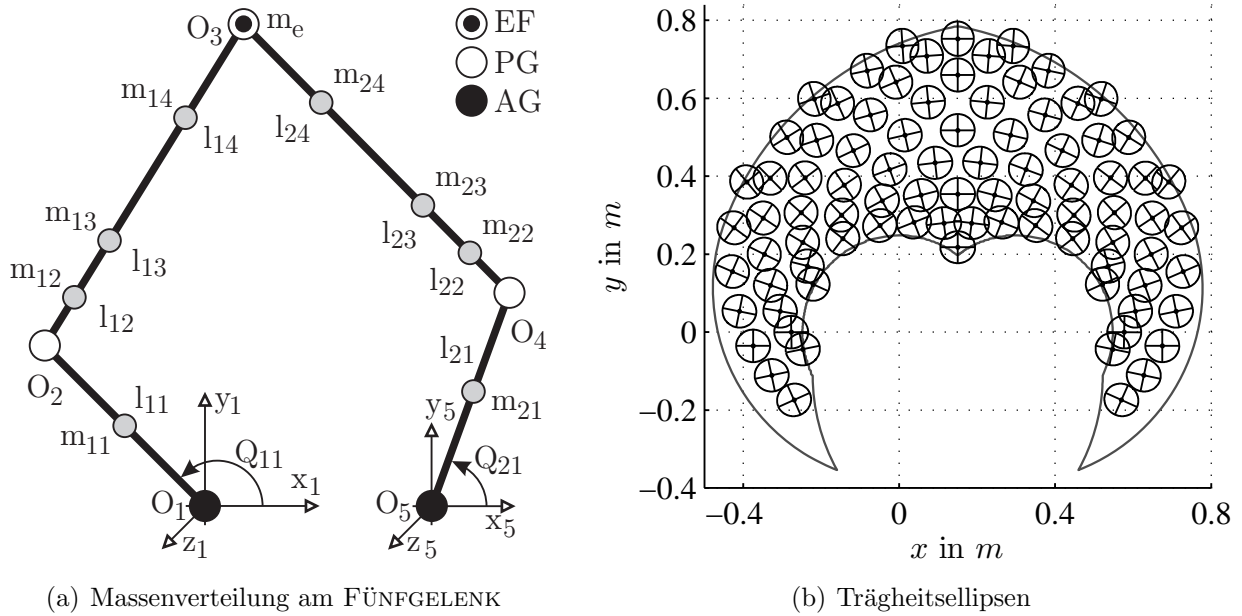


Bild 4.8: Trägheitsellipsen am parallelen Manipulator FÜNFGELENK

Es wurde für den parallelen Manipulator FÜNFGELENK eine Trägheitsanalyse am Modell durchgeführt. Dabei wurden die gleichen Annahmen wie in Abschnitt 4.7.1 getroffen. Die Verteilung der Massen in der Roboterstruktur ist in Bild 4.8(a) dargestellt. Die Parameter, die zur Berechnung der Trägheitsmatrix notwendig waren, sind in Tabelle 4.4 zusammengefasst. Es wurde eine Last von $m_e = 1 \text{ kg}$ am Endeffektor angenommen. Außerdem wurden bei der Berechnung der Trägheitsmatrix die Rotationsträgheiten der beiden unteren und oberen Arme um ihre Schwerpunktlagen, sowie die Rotationsträgheiten der Antriebe $I_{Antrieb}$ mit berücksichtigt. In Bild 4.8(b) sind die im Arbeitsraum des FÜNFGELENKES generierten generalisierten Trägheitsellipsen dargestellt. Sie zeigen, die Abhängigkeit der Trägheit/-Scheinmasse von der Konfiguration und der Raumrichtung. Im Gegensatz zur Steifigkeit ist das Verhältnis der jeweiligen Ellipsenhauptachsen beinahe gleich eins. Dies bedeutet, dass

Parameter	Wert	Einheit
$I_{Antrieb}$	0,089	kgm^2
$m_{11} = m_{21}$	0,523	kg
$m_{12} = m_{22}$	0,063	kg
$m_{13} = m_{23}$	0,125	kg
$m_{14} = m_{24}$	0,186	kg
m_e	1,0	kg

Tabelle 4.4: Parameter des FÜNFGELENKES - II

die Scheinmasse für einen gegebenen Punkt nur geringfügig von der Raumrichtung abhängig ist. Um die Änderung der Trägheit übersichtlicher darzustellen, wurden die Kennfelder in x - und y -Richtung generiert.

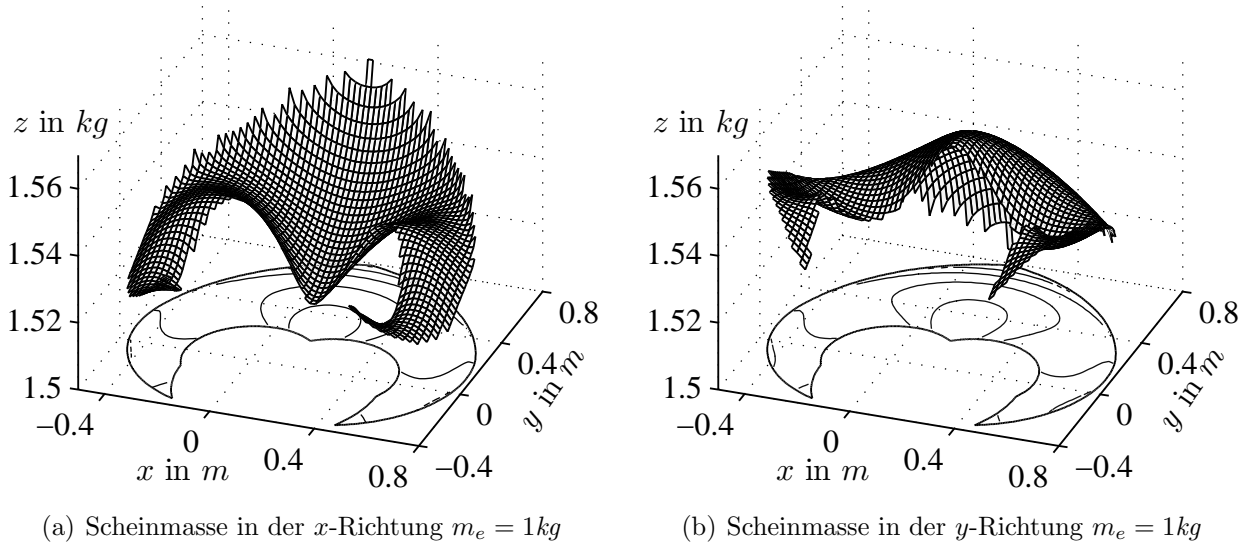


Bild 4.9: Kennfelder der Trägheit am parallelen Manipulator FÜNFGELENK

Sie sind jeweils in den Bildern 4.9(a) und 4.9(b) dargestellt [6, 125, 146]. Die Trägheit/Scheinmasse wurde dabei aus der Formel

$$m_{xy}^{DIR} = \sqrt{\ddot{x}_x^T \underline{\underline{M_x^T}} \underline{\underline{M_x}} \ddot{x}_x} \quad (4.68)$$

berechnet, die auch zur Ermittlung der Scheinmasse in einer beliebigen Richtung genutzt werden kann. Der Vektor \ddot{x}_x legt hier die Raumrichtung fest und seine Länge $\|\ddot{x}_x\| = 1$ ist dabei gleich eins. In manchen Fällen kann es von Vorteil bzw. notwendig sein, ein entsprechendes Feld für jede einzelne Schwingungsmode separat zu generieren, um sie dann getrennt analysieren zu können.

Das generierte Kennfeld berücksichtigt die gesamte Masse und Trägheit der Elemente der Roboterstruktur. Die so projizierte Scheinmasse (4.68) stellt aus diesem Grund noch keine effektiv schwingende Masse dar. Um diese Masse zu ermitteln, kann eine strukturelle Eigenschaft des Robotermodells ausgenutzt werden: Das nichtlineare Modell der Roboterdynamik ist im gesamten Arbeitsraum von seinen Parametern, wie z.B. den Massen und Trägheiten der Elemente oder den Reibungskoeffizienten, linear abhängig. Diese Eigenschaft wird unter anderem bei der Identifikation und der adaptiven Regelung der Manipulatoren genutzt [1, 64, 121, 134]. Aus diesem Grund kann der Beitrag der Trägheitsmatrix $\tau_j^{Träg}$ zu den Momenten/Kräften der Dynamik im Gelenkraum gemäß der Formel (4.21) in der Form

$$\tau_j^{Träg} = \sum_{i=1}^{n_{ae}} m_{ji} f_{ji}(\underline{q}_{ae}, \underline{\ddot{q}}_{ae}) \quad (4.69)$$

aufgeschrieben werden, für $j = 1 \dots n_{ae}$, wobei m_{ij} die Massen oder Trägheiten der Elemente bezeichnen [23, 121]. Die Funktionen $f_{ij}(\underline{q}_{ae}, \underline{\ddot{q}}_{ae})$ verkörpern in der so redefinierten Trägheitsmatrix die nichtlinearen, von der Konfiguration und den Beschleunigungen abhängigen Beziehungen. Es kann angenommen werden, dass die Masse des Manipulators während seiner Bewegung konstant bleibt und die gleichen konstanten Massen in jeder Konfiguration mit unterschiedlichem Anteil zu der effektiv schwingenden Masse, wie zu der gesamten Trägheitsmatrix, beitragen. Gemäß Gleichung (4.69) können die einzelnen Massen wiederum als Wichtungsfaktoren angesehen werden, welche den Beitrag der jeweiligen nichtlinearen Funktion $f_{ij}(\underline{q}_{ae}, \underline{\ddot{q}}_{ae})$ zu der Form des Trägheitsfeldes, dargestellt in Bild 4.9, bestimmen. Die einzige veränderliche Masse, die Endeffektormasse, kann identifiziert und während der Roboterbewegung ebenfalls als konstant angenommen werden [64]. Da diese Massen und Trägheiten einen linearen Einfluss auf die Trägheitsmatrix und dadurch auch auf das Trägheitsfeld aufweisen, wurde angenommen, dass die effektiv schwingende Masse proportional durch einen konstanten Faktor λ zu der projizierten Scheinmasse ist

$$m_{xy}^{DIR} = \lambda \cdot \sqrt{\underline{\ddot{x}}_x^T \underline{\underline{M}}_x^T \underline{\underline{M}}_x \underline{\ddot{x}}_x}. \quad (4.70)$$

Dieser Faktor wurde auf Grund der simulativen Untersuchungen am parallelen Manipulator FÜNFGELENK für den gesamten Arbeitsraum dieser Struktur als konstant angenommen. Der Faktor λ kann bei bekannter Steifigkeit, Frequenz der Schwingung und Trägheit in einer gegebenen Richtung mit Hilfe der Formel (2.74) ermittelt werden. Zusätzlich soll auch bei diesen Überlegungen nicht die Tatsache außer Acht gelassen werden, dass gemäß (2.71) die Masse des Schwingers selbst mit nur einem Drittel zu der effektiv schwingenden Masse beiträgt.

Die effektiv schwingende Masse ist von der Verteilung der Steifigkeiten abhängig. Bei der Annahme, dass die angesteuerten Antriebe virtuelle Steifigkeiten darstellen, kann die gesamte Trägheitsmatrix zur Berechnung der effektiv schwingenden Masse herangezogen werden, da alle Massen zu der Schwingung beitragen. In dem hier diskutierten Beispiel befinden sich die Elastizitäten in den oberen Armen des Manipulators, gezeigt in Bild 4.6(a). Das lässt vermuten, dass nur die zu ihnen gehörenden Massen, bei der Annahme steifer Antriebe, zur effektiv schwingenden Masse gemäß der Gleichung (4.68) beitragen. Diese Beobachtung führt zu dem Vorschlag, eine modifizierte Trägheitsmatrix für die Berechnung der Scheinmasse nach der Formel (4.70) zu verwenden. Eine modifizierte Trägheitsmatrix entsteht durch das Zu-Null-Setzen aller Massen und Trägheiten der starren Elemente, die vernachlässigt werden sollen. Auf diese Weise wird der Beitrag der jeweiligen nichtlinearen Funktionen $f_{ij}(\underline{q}_{ae}, \underline{\ddot{q}}_{ae})$ zu der Form des Trägheitsfeldes unterbunden. Das Kennfeld wird damit nur durch die an der Schwingung beteiligten Massen gestaltet. Die Modifikation der Trägheitsmatrix sollte dabei auf der Basis der Analyse der Roboterstruktur und von Experimenten durchgeführt werden, um sie an das reale System anzupassen.

5 Komponenten der Strukturregelung

Ein Robotersystem setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen. Sie können im Allgemeinen in zwei Gruppen, den Hardware- und den Softwarekomponenten, unterteilt werden. Neben der in den vorherigen Kapiteln besprochenen Roboterstruktur gehören zu den Hardwarekomponenten sowohl die Aktoren und Sensoren mit ihrer Elektronik, als auch die ganze technische Infrastruktur zusammen mit der Kommunikation und den Rechneinheiten [85]. Die Gruppe der Softwarekomponenten bilden die Treiber der Geräte, die Protokolle der Kommunikation und die Programme, welche die Zustände der Maschine anzeigen, die Befehle des Benutzers entgegennehmen und sie dann in das gewünschte Verhalten des Manipulators umsetzen. Die Softwarekomponenten können zusätzlich in die hardwarenahen Komponenten, wie z.B. die Treiber und die abstrakten Komponenten, wie z.B. die Planung der Roboterbewegung, unterteilt werden. Es kann des Weiteren noch eine Kategorisierung der Software- und Hardwarekomponenten in von der Roboterstruktur und der gestellten Aufgabe abhängige und unabhängige Komponenten durchgeführt werden [80]. Die Organisation der Systemarchitektur und die Entwicklung bestimmter Funktionalitäten, wie z.B. der Bahnplanung, können unabhängig von der Roboterstruktur erfolgen. Die Steuerung und Regelung des Manipulators verlangen dagegen nach einem möglichst exakten Robotermodell, das dementsprechend roboterspezifisch erstellt wird. Zusätzlich ändert sich, abhängig von der Aufgabe, die Anzahl der nötigen Software- und Hardwaremodule im System. Die Algorithmen zur Kraftregelung benötigen beispielsweise Kraftsensoren und die Regelungsverfahren zur Schwingungsunterdrückung Sensoren, welche die Erfassung der Strukturschwingungen ermöglichen [5, 104].

Der Bedarf nach Universalität und Anpassungsfähigkeit eines Robotersystems stellt bestimmte Anforderungen an die gesamte Systemarchitektur. Eine entsprechende Architektur sollte es ermöglichen, beliebige Hardware- oder Softwarekomponenten ohne Komplikationen anzuschließen, zu entkoppeln oder zu modifizieren. Weiterhin müssen Mechanismen geschaffen werden, die eine deterministische Programm- und Datenverwaltung, eine Echtzeit-Ausführung der systemkritischen Programme und einen schnellen, konsistenten, kollisionsfreien Datenaustausch zwischen den einzelnen Modulen und Komponenten in Echtzeit

gewährleisten können. Die Systemarchitektur muss darüber hinaus universell und für die unterschiedlichen Manipulatoren und Aufgaben leicht einsetzbar sein, um letztendlich den Arbeitsaufwand beim Systemaufbau zu minimieren.

5.1 Systemarchitektur

Um den gestellten Anforderungen gerecht zu werden, wurde im Rahmen des Sonderforschungsbereiches SFB 562 eine Steuerungs- und Regelungsarchitektur, genannt PROSA (engl. Parallel RObots Software Architektur), entwickelt [59, 60, 80, 85]. Das Konzept basiert auf der hierarchischen und modularen Verteilung des Systems sowohl auf Software-, als auch auf Hardwareebene. In Bild 5.1 ist schematisch die Organisation dieser Architektur und die Positionierung der Aktoren und Sensoren an der untersuchten Roboterstruktur FÜNFGELENK dargestellt.

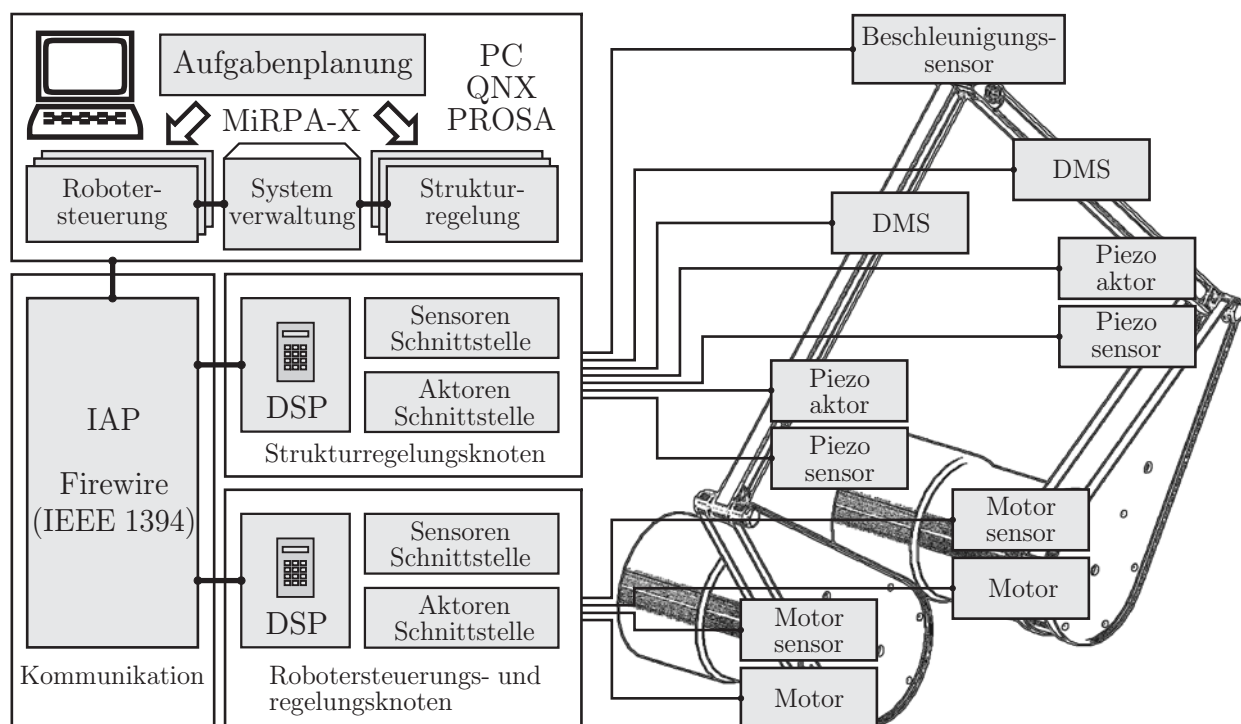


Bild 5.1: Elemente der Systemarchitektur - FÜNFGELENK

Dieses Robotersystem setzt sich prinzipiell aus der Roboterstruktur, den Aktoren und Sensoren, einer Kommunikationinfrastruktur und einem oder mehreren Rechnern zusammen. Die Rechner, in diesem Fall die Personal Computer (PC) unter dem Echtzeitbetriebssystem QNX, bilden eine Umgebung für all diejenigen Programme, welche eine interaktive Zusammenarbeit

mit dem Benutzer ermöglichen und das gewünschte Verhalten der Maschine gemäß den Benutzerbefehlen und Sensorinformationen mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Aktoren bewirken. Zu diesen Programmen gehören unter anderem die Benutzerschnittstelle GUI (engl. Graphical User Interface), der Bahnplaner und die Steuerungs- und Regelungsalgorithmen. Der modulare Aufbau der Software ist dank einer Middleware MiRPA-X (engl. Middleware for Robotic and Process control Applications - eXtended) möglich. Die MiRPA-X verwaltet den Ablauf aller Programme nach dem in PROSA festgelegtem Schema und organisiert die Kommunikation zwischen den einzelnen Softwaremodulen und den verteilten Hardwarekomponenten. Die MiRPA-X kann somit als ein Teil der Kommunikationsarchitektur angesehen werden. Die Kommunikation zwischen den Rechnern und der Hardwarekomponenten wird mit Hilfe des TCP (engl. Transmission Control Protocol) und dem FireWire Kommunikationsstandard - IEEE 1394 realisiert. Die FireWire-Infrastruktur wird dabei durch ein Protokoll, genannt IAP (engl. Industrial Automation Protocol), verwaltet [62]. Dieses Protokoll bildet eine Schicht zwischen den einzelnen Programmen bzw. Softwaremodulen und den Treibern des FireWire-Standards. Die verteilten Hardwarekomponenten sind durch einen oder mehrere Knoten an die Kommunikationsinfrastruktur und damit an das gesamte System angeschlossen. Das Herz eines solchen Knotens bildet ein digitaler Signalprozessor (DSP), welcher die Aktor- und Sensorelektronik bedient und den Datenaustausch mit dem System verwaltet. Zu einem Knoten gehören nur solche Komponenten, die gemäß des modularen Systemkonzeptes einer Funktionalität entsprechen. In der präsentierten Architektur besitzt das System zwei Knoten, einen für die Starrkörpersteuerung/-regelung und einen für die Strukturregelung. Eine solche Anordnung der Elemente garantiert eine gute Übersichtlichkeit in einem so komplexen System und ermöglicht zusätzlich eine separate Entwicklung und Inbetriebnahme aller Module und Funktionalitäten.

5.2 Kommunikationsarchitektur

Die Kommunikationsarchitektur spielt auf Grund der modularen Systembauweise der hier vorgestellten Steuerungs- und Regelungsarchitektur PROSA eine zentrale und entscheidende Rolle [59, 61, 62, 80]. Sie setzt sich aus drei Hauptkomponenten zusammen, der Middleware MiRPA-X, dem IA-Protokoll und der Firewire (IEEE 1394) Infrastruktur. Die MiRPA-X bildet dabei den Kern der Architektur. Sie organisiert basierend auf den QNX-Funktionalitäten und QNX-Echtzeit-Mechanismen:

- einen asynchronen Nachrichten- und Datenaustausch,
- einen schnellen Datenzugriff,

- eine echtzeitfähige Systemverwaltung und
- eine Synchronisation der Ereignisse.

Der asynchrone Nachrichten- und Datenaustausch ist ereignisgesteuert und dient den jeweiligen Modulen zur Verwaltung ihrer Programmabläufe, dem Datenaustausch zwischen den Modulen und der Zusammenarbeit der Module mit der Systemverwaltung. Der schnelle Datenzugriff und auch der schnelle Datenaustausch zwischen den Modulen wird durch einen gemeinsamen Speicherbereich realisiert, welcher von MiRPA-X zur Verfügung gestellt wird. Die Applikationen können die Nutzung dieses Bereiches anmelden und während ihres Ablaufs auf diesen Bereich zugreifen. Die echtzeitfähige Systemverwaltung organisiert und überwacht die Ausführung aller Programme auf Grund der vorab festgelegten und auch dynamisch variierenden Prioritäten. Nach der Ausführung aller für einen Zyklus bestimmten Programme erlaubt sie eine asynchrone Ausführung der übrigen Aufgaben, wie z.B. der Benutzerschnittstelle oder asynchroner Kommunikation zwischen den Modulen. Bei einer Multiprozessorarchitektur kann es auch notwendig werden, die Module und Programme miteinander zu synchronisieren [85]. Die MiRPA-X liefert auch dazu die nötigen Mechanismen. Die Verbindung zwischen den Rechnern und den Knoten wird mit Hilfe der Firewire-Infrastruktur (IEEE 1394) und den dazugehörigen Treibern hergestellt. Das übergeordnete IAP garantiert den deterministischen Ablauf aller geforderten Programme und verwaltet die Firewire-Infrastruktur, um die gestellten Anforderungen bezüglich der Bandbreite, der Geschwindigkeit und der Echtzeit zu erfüllen [62]. Es konfiguriert die Kommunikation unter Berücksichtigung aller an das Netz angeschlossenen Module, verwaltet den isochronen Kommunikationszyklus und überwacht die Kommunikation. Nach der isochronen Kommunikation besteht die Möglichkeit einer asynchronen Kommunikation. Die Knoten können dabei ebenfalls miteinander kommunizieren. Die angestrebte Zyklusfrequenz der Kommunikation liegt bei 8 kHz . Die im Labor erreichte Geschwindigkeit betrug dabei abhängig von der Systemkonfiguration zwischen $0,25\text{ kHz}$ und 2 kHz [5, 80].

5.3 Adaptronikknoten

In dem, in Bild 5.1, vorgestellten Robotersystem können zwei Knoten identifiziert werden, ein Knoten für die Starrkörpersteuerung und -regelung und der zweite Knoten für die Strukturregelung. In dieser Arbeit steht die Strukturregelung und dementsprechend der dazugehörige Knoten im Vordergrund. Ein Knoten besteht im Allgemeinen aus drei Hauptkomponenten: einer Firewire-Kommunikationskarte, einer DSP-basierten Steuerungseinheit

und einem Messsystem in Form einer Analog-Digital/Digital-Analog Wandler-Karte (DAB-612). Dabei war das Messsystem die einzige Komponente, die nicht vorhanden war. Die Hauptanforderung an das Messsystem ist in erster Linie eine hohe Zahl analoger Eingänge. Schon die Analyse der Schwingungen eines elastischen Balkens, durchgeführt in Abschnitt 2.3.1, hat gezeigt, dass die Schwingungserfassung für ein so einfaches Element, abhängig von der Art der Beanspruchung und der eingesetzten Sensoren, mehrere Messstellen erfordern kann. Im Fall eines elastischen parallelen Manipulators hängt die Anzahl der zu messenden Größen von der Komplexität der Struktur und der eingesetzten Sensorart ab. Sie kann gleich oder höher als die Zahl der Freiheitsgrade der Roboterstruktur sein. Es bleibt dabei das Problem der Auswahl und Platzierung der Sensoren, was eine entscheidende Rolle bei der Schwingungsunterdrückung spielt [5, 140]. Vergleichende Untersuchungen der Sensoren können diese Entwurfsphase effizient unterstützen. Dazu müssen aber mehrere analoge Eingänge gleichzeitig zur Verfügung gestellt werden. Ein weiterer wichtiger Aspekt bei so einem Messsystem ist die Möglichkeit, die Messwerte synchron zu erfassen, d.h. sie parallel und synchron mit möglichst guter Auflösung zu digitalisieren. Die Phasenverschiebung zwischen den in einem Zyklus gewonnenen Messungen wird damit minimiert/eliminiert, was sich auf die weitere Signalverarbeitung vorteilhaft auswirkt. Alle Komponenten des Knotens - das Messsystem, die Steuereinheit und die Kommunikationskarte - müssen ebenfalls die strengen Kriterien des gesamten Systems erfüllen, wie z.B. die begrenzte Nutzung der Interrupts oder deterministisch definierte und an den Kommunikationstakt angepasste Antwort- und Bearbeitungszeiten. Diese Anforderungen konnten durch die auf dem Markt verfügbaren Geräte zur Datenerfassung und Datenausgabe nicht erfüllt werden. Aus diesem Grund wurde im Rahmen dieser Arbeit ein entsprechender Knoten mit einem Messsystem, genannt DAB-612 (engl. Data Acquisition Board), konzipiert und gebaut.

Das entwickelte Messsystem wurde modular aufgebaut und besteht grundsätzlich aus zwei Komponenten: einer Steuer-/Versorgungsspannungsplatine (SVP) und ein bis drei Messplatinen (DAB-612) [38]. Jede der Messplatinen besitzt sechs analoge Eingänge und zwei analoge Ausgänge. Die Messplatinen können maximal zu dritt an einem DSP betrieben werden, so dass eine maximale Anzahl von

- 18 analogen Eingängen mit einer 16 *bit* Auflösung und
- 6 analogen Ausgängen mit einer 16 *bit* Genauigkeit

durch das Messsystem bereitgestellt werden kann. Bild 5.2 zeigt den Kern des Adaptronikknotens. Dieses Modul setzt sich aus drei DAB-612 Messplatinen, einer Steuer-/Versorgungsspannungsplatine (SVP), einer Firewire-Karte und einem DSP (TMS320C6x11 der Firma Texas Instruments auf einer Platine der Firma Orsys) zusammen. Das gesamte Messsys-

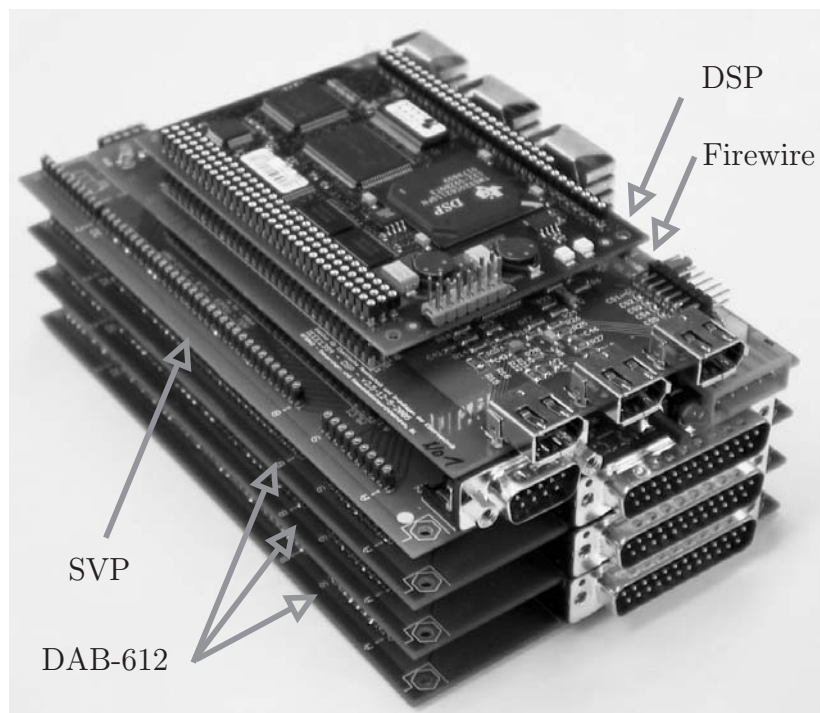


Bild 5.2: Zentrales Modul des Adaptronikknotens

tem des Knotens arbeitet auf folgende Weise: Die autonom agierende Steuer-/Versorgungsspannungsplatine (SVP) empfängt ihre Befehle vom DSP und steuert von diesem unabhängig die Messplatinen (DAB-612). Nach dem Empfangen des Befehls digitalisieren alle separaten AD-Wandler (Analog-Digital-Wandler ADS8364) die Signale parallel und synchron mit einer maximalen Geschwindigkeit von 200 kSamples/s und einer Auflösung von 16 bit (die effektive Auflösung beträgt $13,3 \text{ bit}$) [38]. Alle Eingänge der AD-Wandler wurden mit einem Anti-Aliasing-Filter mit *Bessel*-Charakteristik 5^{ter} -Ordnung (LTC1065) ausgestattet. Die 16 bit DA-Wandler (Digital-Analog-Wandler AD7846) geben die Signale ebenfalls parallel und synchron aus. Die Messplatinen verfügen zusätzlich über einen asynchronen FIFO-Speicher (engl. First In, First Out IDT7204), der die Möglichkeit einer Überabtastung (engl. oversampling) anbietet. Dadurch kann die Qualität der Messungen mit einfachen Mitteln erhöht werden. Die CPLD-Steuerungseinheit (engl. Complex Programmable Logic Device ispLSI5256VE) auf der SVP und die FIFO-Speicher auf den Messplatinen erlauben diesem Messsystem ein autonomes Arbeiten, so dass der DSP in die Messungen nicht involviert ist. In dieser Zeit kann der DSP sein Programm weiter ausführen. Dieses Messsystem bildet die Basis für die Untersuchungen an den gewählten Sensoren und für die experimentelle Erprobung der entwickelten Konzepte. Die hier entwickelte Messeinheit wurde auch in anderen, im Sonderforschungsbereich 562 entwickelten parallelen Manipulatoren, wie z.B. HEXA oder TRIGLIDE, als Element der Hardwareinfrastruktur eingesetzt [5, 104].

5.4 Sensoren und Aktoren

Die Sensoren und Aktoren zur Schwingungsunterdrückung werden entweder an der Roboterstruktur angebracht oder in sie integriert. In Betracht kommen Elemente, welche Kräfte oder Momente auf direkte oder indirekte Weise aufnehmen bzw. erzeugen können. Sie müssen des Weiteren gewisse Bedingungen erfüllen, wie z.B. ein geringes Gewicht, an das System angepasste Bandbreite und gut definiertes dynamisches Verhalten. Die Möglichkeit einer quasi-statischen/statischen Messung bzw. Krafterzeugung kann dabei von Vorteil sein. Auf Grund dieser Kriterien wurden drei verschiedene Sensorarten

- der Dehnungsmessstreifen - Vollbrücken-Anordnung,
- der Beschleunigungssensor - dreiachsig,
- der Piezosensor - strukturintegrierte Stapelbauform

und eine Aktorart

- der Piezoaktor - strukturintegrierte Stapelbauform

gewählt und untersucht. Für die Dehnungsmessstreifen (DMS) und Piezosensoren wurde anschließend die nötige Sensorelektronik angefertigt. Die schematische Platzierung der Sensoren und der Piezoaktoren am Versuchsträger FÜNFGELENK ist in Bild 5.1 dargestellt. Die Sensoranordnung resultierte dabei aus dem Ziel, sowohl eine ausführliche Untersuchung der Roboterstruktur als auch einen Vergleich der Sensoreigenschaften zu ermöglichen. Die Platzierung der Piezoaktoren dagegen erfolgte unter der Vorgabe eines optimalen Einflusses auf die Roboterstruktur. Auf die Antriebe des Manipulators, die ebenfalls zur Strukturregelung eingesetzt werden könnten, wurde hier aus den im Abschnitt 1.2.2 genannten Gründen verzichtet. Die an die Antriebe angeschlossenen Arme, die Kurbeln, wurden in der *xy*-Arbeitsebene als starr angenommen, da sie in Dreiecksform aus einem Carbonfaserverstärkten Kunststoff (CFK) gefertigt wurden, was eine deutlich erhöhte Steifigkeit zur Folge hatte. Die passiven Gelenke wurden in der Modellierung ebenfalls als starr angenommen [97]. Die oberen Arme wurden wie die Kurbel aus einem CFK-Material hergestellt, wurden dabei jedoch lang und schlank gebaut, um den Arbeitsraum des Manipulators bei gleichzeitiger Minimierung ihrer Masse möglichst groß zu gestalten. Die Leichtbauweise der oberen Arme führte unausweichlich zu einer Reduzierung ihrer Steifigkeit. Aus diesem Grund wurden sie als elastisch und als Quelle der Schwingungen in der Roboterstruktur angenommen. Die adaptiven Sensoren wurden deswegen an den elastischen, oberen Armen und dem Endeffektor des Manipulators platziert. Um die entstandenen Schwingungen aktiv dämpfen zu können, wurde jeder dieser Roboterarme mit einem Piezostapel ausgestattet und auf diese

Weise ein aktiver Arm geschaffen. Die schematische Bauweise eines solchen Armes ist in Bild 5.3 dargestellt [16, 51, 52]. Die Parameter der jeweiligen Komponenten wurden in Tabelle 5.1 gesammelt. Sie ergänzen die Daten aus den Tabellen 4.3 und 4.4.

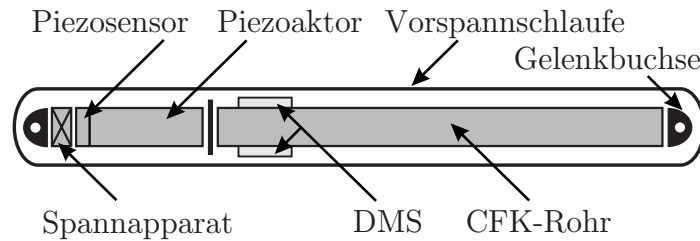


Bild 5.3: Aktiver Arm des Manipulators FÜNFGELENK

Parameter	Wert	Einheit
Länge der Vorspannschlaufe	500	<i>mm</i>
Länge des Spannapparates und Gelenkbuchsen	20	<i>mm</i>
Durchmesser Piezostapel	16	<i>mm</i>
Breite Vorspannschlaufe	18	<i>mm</i>
Außendurchmesser CFK-Rohr	18	<i>mm</i>
Massendichte CFK-Rohr	1,6	<i>g/cm³</i>
Massendichte Piezostapel	7,6	<i>g/cm³</i>
E-Modul Piezostapel	$33,82 \cdot 10^9$	<i>N/m²</i>
E-Modul Vorspannschlaufe	$144,0 \cdot 10^9$	<i>N/m²</i>
T300, 60 % Faservolumengehalt		
E-Modul CFK-Rohr	$200,0 \cdot 10^9$	<i>N/m²</i>
M46, 50 % Faservolumengehalt		

Tabelle 5.1: Parameter des aktiven Armes - FÜNFGELENK

Der aktive Arm setzt sich grundsätzlich aus einem Piezostapel mit einer Länge von 76 mm und einem CFK-Rohr mit einer Länge von 404 mm , bei einer Wanddicke von 1 mm , zusammen. Das Rohr besteht aus unidirektionalen Carbonfasern, die in Richtung der Längsachse des Rohres orientiert sind, um eine maximale Steifigkeit pro Gewichtseinheit in dieser Richtung zu gewährleisten. Als Fasermaterial wurde die Faser M46 der Firma Toray ausgewählt. An das CFK-Rohr wurde eine DMS-Messbrücke angebracht, um die Zug/Druckkräfte messen zu können. Ein Piezostapel der Firma Piezomechanik, aus einem Plumbum-Zirkonat-Titanat (PZT) - einem polykristallinen Keramikstoff PXE5 der Firma Morgan Electro Ceramics, wurde in zwei Sektionen geteilt, in eine Sensorsektion mit der Länge von 16 mm und eine Aktorsektion

mit der Länge von 60 mm [83]. Der Piezosensor misst dieselben Zug-/Druckkräfte, wie die DMS-Messbrücke. Der Piezoaktor benötigte eine mechanische Vorspannung, um einerseits selber Kraft erzeugen zu können und andererseits um durch die am Arm wirkenden Zugkräfte nicht zerstört zu werden. Aus diesem Grund wurde der Piezostapel mit dem CFK-Rohr durch eine Vorspannschlaufe zusammengedrückt. Die Vorspannschlaufe wurde aus unidirektionaler Carbonfaser T300 der Firma Toray hergestellt. Die Dicke dieser Schlaufe beträgt 1 mm. Sie ist weicher als das CFK-Rohr und der Piezostapel zusammen, wodurch die Möglichkeit der Längenänderung im μm -Bereich des ganzen aktiven Armes gegeben ist. Ein Spannapparat im aktiven Arm erlaubt das Einstellen der Vorspannkraft durch die Änderung der Länge des Apparates, was auch die durch den Piezoaktor erzeugten Kräfte bestimmt. Alle Roboter-elemente aus CFK wurden vom Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Braunschweig hergestellt [51].

5.4.1 Dehnungsmessstreifen - DMS

Dehnungsmessstreifen (DMS) messen die Oberflächendeformationen eines linear-elastischen Körpers, welche gemäß der Ausführungen in Abschnitt 2.2.1 proportional zu den einwirkenden Kräften und Momenten sind [39, 114]. DMS sind damit zur Messung sowohl dynamischer als auch statischer Kräfte und Momente geeignet [46, 106, 113]. Deswegen können sie zur Schwingungserfassung an einer Roboterstruktur eingesetzt werden [56, 87, 90, 105]. Entscheidend für eine effektive Nutzung der DMS ist ihre Platzierung. Sie müssen an den Teilen des Manipulators angebracht werden, welche Kräfte übertragen und sich dabei entsprechend verformen. Außerdem müssen sie an solchen Stellen platziert werden, wo die erwartete Amplitude der auftretenden Deformationen ihr lokales Maximum annimmt, wie das z.B. bei den in Abschnitt 2.3.1 besprochenen Biegedeformationen der Fall war [81]. Der Einfluss der Dehnungsmessstreifen auf die Gewichtverhältnisse der Roboterstruktur kann wegen ihres geringen Gewichtes vernachlässigt werden.

DMS sind in der Lage alle vier Arten der Beanspruchungen (Zug/Druck, Scherung, Biegung, Torsion) zu messen. Sie können dabei sowohl einachsige als auch zweiachsige Spannungszustände erfassen [46]. Da sie die Körperdeformationen messen, müssen sie an den jeweiligen Körper und ebenfalls an die Art der Beanspruchung angepasst werden. Die Anpassung an das Material soll vor allem den Temperatureinfluss auf die Messung reduzieren bzw. eliminieren. In dem Fall, dass die Temperaturkoeffizienten des DMS und des Materials sich unterscheiden, entsteht bei gleicher Temperaturänderung des Sensors und des Elementes eine mechanische Spannung zwischen ihnen. Diese wird als eine Kraft- oder Momentänderung vom Messsystem erfasst, was aber nicht der Realität entspricht. Bei statischen Messungen bedeutet das

einen Messfehler. Bei dynamischen Messungen dagegen wird das zu einer Drift des Signals und, wenn die thermische Deformation ausreichend groß ist, zum Verlassen des Messbereiches führen. Die Befestigung der DMS am jeweiligen Element stellt auch ein Problem dar. Die Eigenschaften des Klebstoffes können zu einem Langzeit-Kriechen des Nullwertes und auch zum Verlassen des Messbereiches führen. Ein weiterer Aspekt, der zu beachten ist, ist der Schutz des DMS vor Feuchtigkeit, was mit einem geeigneten Abdeckungsmittel zu gewährleisten ist. Die Anpassung der DMS an die Art der Beanspruchung wird durch die Konstruktion des DMS selbst und seine Anordnung in einem Messsystem (Messbrücke) erreicht. Eine geeignete Anordnung des DMS erlaubt es, nur eine Art der Beanspruchungen auch bei Existenz anderer Arten zu messen. So kann z.B. bei einer Messung der Zug-/Druckkräfte an einem Stab der Einfluss der einwirkenden Biegemomente eliminiert werden. DMS können als Messsystem zu einer

- einfachen Viertelbrücke,
- Halbbrücke,
- Zweiviertelhalbbrücke und
- Vollbrücke

verschaltet werden [24, 113]. Die Wahl der Verschaltung ist von den Platzverhältnissen und der Aufgabe abhängig. Die Vollbrücken-Schaltung weist dabei die meisten Vorteile auf. Bei einem spiegelsymmetrischen Querschnitt eines zu messenden Elementes kann die Querempfindlichkeit minimiert werden, die Temperatureinflüsse können gut kompensiert werden und die Störeinflüsse der brückeninternen Verbindungen werden unterdrückt [46].

Die DMS wurden am CFK-Rohr des aktiven Armes des elastischen parallelen Manipulators FÜNFGELENK befestigt, was in Bild 5.3 schematisch gezeigt ist. Wegen der oben genannten Eigenschaften wurden sie zu einer *Wheatstoneschen* - Vollbrücke verschaltet. Es wurde eine Messanordnung zur Erfassung der Zug-/Druckkräfte gewählt. Die DMS wurden ohne ihre Sensorelektronik montiert, um die Roboterstruktur nicht mit zusätzlichen Massen zu belasten. Problematisch war dabei die Wahl der geeigneten Dehnungsmessstreifen für das CFK-Rohr. Diese Komplikation resultierte aus der fehlenden Spezifikation der CFK-Rohre, welche aus Carbonfasern und Epoxidharz hergestellt wurden. Aus diesem Grund wurde experimentell der DMS für Aluminium der Firma Hottinger Baldwin Messtechnik (HBM) gewählt. Die durchgeführten Experimente haben gezeigt, dass der DMS die Messungen bei den vorliegenden unidirektionalen Verbundstoffen prinzipiell ermöglicht. Die Kräfte und dadurch auch die Schwingungen konnten gemessen werden. Dementsprechend konnten die DMS

z.B. bei der Kalibrierung der Piezosensoren eingesetzt werden. Weitere Untersuchungen haben jedoch gezeigt, dass die fehlende thermische Anpassung den operativen Einsatz der DMS auf CFK-Rohren verhinderte. Bereits die durch Piezoaktoren erzeugten Schwingungen haben bei konstanter Umgebungstemperatur zum Verlassen des Messbereiches durch das DMS-Messsystem geführt. Dieser Effekt kann durch die interne Dämpfung des CFK-Rohres erklärt werden, durch welche die Schwingungsenergie in Wärme umgewandelt wurde, die dann zur Temperaturänderung des CFK-Rohres führte. Ohne erneute Kalibrierung oder Anpassung der mechanischen Vorspannung wären weitere Messungen nicht möglich gewesen. Dieses thermische Problem trat auch direkt beim Einschalten des Messsystems auf. Die mit Gleichstrom gespeisten DMS-Messbrücken mussten zunächst ihre Betriebstemperatur erreichen, bevor sie zur Messung eingesetzt werden konnten. Desweiteren konnte eine Änderung des Messsignals bei Luftkonvektion beobachtet werden und das trotz der Abdeckung der DMS mit einem Schutzmittel auf Gummibasis. Rekapitulierend kann festgestellt werden, dass DMS bei Carbonfaserverstärkten Kunststoffen prinzipiell eingesetzt werden können. Es müssen aber speziell thermisch angepasste DMS gefertigt werden. Auf Grund der oben beschriebenen Ergebnisse wurde auf den Einsatz von DMS am Versuchsträger FÜNFGELENK verzichtet.

5.4.2 Beschleunigungssensor

Die Beschleunigungssensoren stellen eine leicht zu applizierende Lösung als Sensor zur Schwingungsunterdrückung dar. Sie sind kompakt, klein und relativ leicht (10,5 g bei dem hier eingesetzten Modell), so dass sie an einer nahezu beliebigen Stelle der Struktur angebracht werden können. Bei den gegebenen Anforderungen hinsichtlich Genauigkeit, Frequenzbereich und Linearität sind sie aber dementsprechend teuer, im Vergleich zu den beiden hier besprochenen Sensorarten. Das Messprinzip basiert auf der Messung der Positionsänderung einer kleinen federnd aufgehängten seismischen Masse. Zur Messung der Positionsänderung kommen alle Methoden in Frage, die den Weg, z.B. kapazitive Verfahren, oder die Kraft, z.B. Piezosensoren oder DMS, messen können. Die seismische Masse ist so platziert, dass sie die Messung der Beschleunigung nur in einer Richtung zulässt, andere Einflüsse werden dabei unterdrückt. Alle Arten dieser Sensoren erlauben dynamische Beschleunigungsmessungen aber nur manche, abhängig von dem Messprinzip, statische Beschleunigungsmessungen.

Beschleunigungssensoren können bei bekannter effektiv schwingender Masse m^{eff} des Elementes die dynamischen Kräfte

$$f_x = a_x \cdot m^{eff} \quad (5.1)$$

messen, wobei f_x die kartesische Kraft und a_x die kartesische Beschleunigung bezeichnen. Die effektiv schwingende Masse eines linearen Systems ist relativ einfach zu bestimmen. Aus diesem Grund stellt der Beschleunigungssensor für die auf der lokalen Linearisierung des nichtlinearen Robotermodells basierenden Regelungsalgorithmen eine gute Sensorlösung dar [4, 5, 66, 87, 105]. Bei den modellbasierten Algorithmen sind die Informationen über Beschleunigungen zur Schwingungsunterdrückung meistens ausreichend. Es kann aber bei bestimmten Algorithmen nach einer Beziehung zwischen der am Endeffektor einwirkenden Kraft und den durch die Aktoren erzeugten Kräften verlangt werden. Wie bereits in Abschnitt 4.7.2 besprochen, ist die effektiv schwingende Masse von der Pose des Roboters abhängig, so dass die Kräfte am Endeffektor aus den gemessenen Beschleunigungen und dadurch auch die angesprochene Beziehung, nicht so trivial ermittelt werden können. Ein großer Vorteil des Beschleunigungssensors ist dabei die Möglichkeit, die Schwingungen direkt an der Stelle zu messen, wo sie unterdrückt werden sollen. Diese Eigenschaft kann für die effektive Schwingungsunterdrückung entscheidend sein [5].

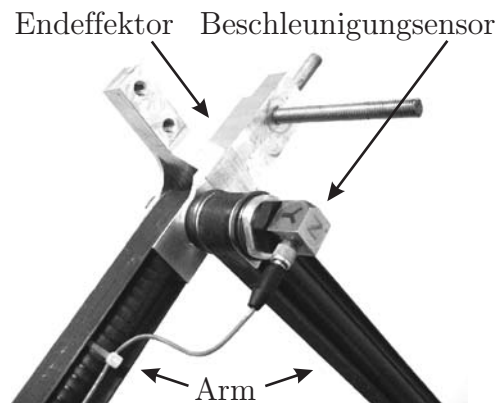


Bild 5.4: Beschleunigungssensor am Endeffektor des Manipulators FÜNFGELENK

Für die Untersuchungen wurde ein dreiachsiger xyz -Beschleunigungssensor der Firma PCB Piezotronics, Modell 356A15, gewählt. Dieser Sensor kann Beschleunigungen bis zu $\pm 50 g$ ($\pm 490,5 m/s^2$) messen. Er wurde am Endeffektor des Manipulators FÜNFGELENK, dargestellt in Bild 5.4, platziert, da die Schwingungen vor allem an dieser Stelle unterdrückt werden sollen, um die gewünschten Zykluszeiten bei der zu erwartenden Genauigkeit des Manipulators zu gewährleisten. Mit Hilfe dieses Sensors ist es möglich, die Beschleunigungen in der xy -Arbeitsebene und die Beschleunigung in der z -Richtung senkrecht zu der Arbeitsebene separat zu messen. Die Versuche haben eine gute Anwendbarkeit des Beschleunigungssensors bestätigt, so dass er bei den weiteren Untersuchungen eingesetzt wurde.

5.4.3 Piezosensoren

Piezoelektrische Materialien können in verschiedenen Bauformen, wie z.B. Stapel, Streifen oder Scheiben, gefertigt werden, was ihre Integration in die Roboterstruktur erleichtert [16, 52, 144]. Auf Grund der Konstruktion des Versuchsträgers FÜNFGELENK wurde für die hier untersuchten Piezoelemente eine Stapelbauweise gewählt. Diese erlaubte es den Piezosensoren, Kräften im kN -Bereich standhalten zu können. Die Piezosensoren wurden dabei durch eine galvanische Auftrennung des in den aktiven Arm integrierten Piezostapels gewonnen, was Bild 5.3 entnommen werden kann [4, 15, 108]. Aus konstruktiver Sicht ist das eine sehr praktische und kostensparende Lösung. Die Kosten eines solchen Messkanals sind mit den Kosten eines DMS-Messkanals vergleichbar. Der Vorteil gegenüber den DMS ist dabei die vernachlässigbare Empfindlichkeit hinsichtlich der Temperaturänderung.

Das Messprinzip eines Piezosensors basiert auf dem direkten Piezoeffekt, bei dem die Deformation eines Kristalls die Entstehung einer Ladung zur Folge hat [113]. Diese Ladung ist proportional zu der Kraft bzw. dem Moment und für den am Piezostapel genutzten Longitudinaleffekt unabhängig von der Sensorgeometrie. Aus diesem Grund sind diese Elemente meistens scheibenförmig und werden in eine Reihe von n_s Piezoscheiben geschaltet, um die Ladungsausbeute zu erhöhen [70]. Die gewonnene Ladung kann folgendermaßen

$$q_s = n_s \cdot d_{33} \cdot f_x \quad (5.2)$$

berechnet werden, wobei, d_{33} der Piezomodul in der Longitudinalrichtung ($500 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}$ für den eingesetzten Stoff), f_x die senkrecht zu der Piezoscheibe einwirkende Kraft und q_s die von dem Sensor erzeugte Ladung repräsentieren [83]. Diese Ladung muss in eine elektrische Spannung umgewandelt werden, um sie messen bzw. digitalisieren zu können. Zu diesem Zweck wird ein Ladungsverstärker, ein Integrierschaltkreis, genutzt. Die Abbildung 5.5 zeigt den prinzipiellen Aufbau einer solchen Schaltung. Die daraus resultierende Ausgangsspannung ergibt sich als

$$U_s = \frac{-\frac{q_s}{C_r}}{1 + \frac{C_t + C_r + C_c}{V_s \cdot C_r}}, \quad (5.3)$$

wobei C_c die Sensorkapazität, C_t die Kabelkapazität, C_r die Rückkopplungskapazität, R_t der Widerstand zur Bestimmung der Grenzfrequenz, R_i der Isolationswiderstand des Eingangskreises (Sensor, Kabel und Verstärkereingang - typisch $R_i > 100T\Omega$), V_s die Verstärkung des

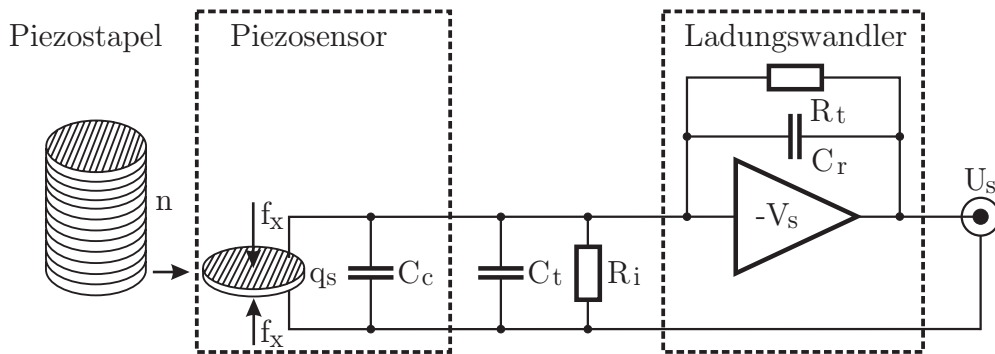


Bild 5.5: Messprinzip mit einem Piezosensor

Operationsverstärkers, q_s die erzeugte Ladung und U_s die Messspannung bezeichnen [24, 70]. Bei ausreichend großer Verstärkung V_s ist die Spannung U_s gleich dem Zähler der Gleichung (5.3). Die Kapazität C_r ist wählbar und bestimmt den Messbereich des Piezosensors.

Die Piezoscheiben und die Sensorelektronik charakterisiert ein endlicher Widerstand R_i , der zur Entladung der Rückkopplungskapazität C_r führt. Deswegen sind diese Sensoren nur zur Messung von dynamischen und quasi-statischen Kräften geeignet. Die Messung der quasi-statischen Kräfte verlangt jedoch eine Nachrüstung der in Bild 5.5 dargestellten Schaltung um einen PI-Regler, welcher der Sättigung des Integrierschaltkreises und der Entladung der Rückkopplungskapazität C_r entgegenwirken kann. Dadurch können abhängig von dem Verlustwiderstand bzw. der Verlustimpedanz R_i , der Rückkopplungskapazität C_r und der Zeitkonstanten des PI-Reglers Entladungszeiten bis zu ein paar Stunden erreicht werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine solche, erweiterte Schaltung gebaut [15]. Bei den gegebenen Piezostapelparametern konnte eine Zeitkonstante des Piezosensors von ca. 500 ms erreicht werden. Diese Zeitkonstante war für den Einsatz der Piezosensoren zum Zweck der Schwingungsunterdrückung und der quasi-statischen Messung akzeptabel, da bei den hochdynamischen parallelen Manipulatoren gerade Arbeitszyklen in diesem Zeitbereich vorkommen. Die Piezosensoren wurden kalibriert und konnten, abhängig von dem Sensor, Kräfte in einem Bereich von ca. $\pm 325 \text{ N}$ messen. Sie wurden wegen ihrer guten Eigenschaften in den weiteren Untersuchungen eingesetzt.

5.4.4 Piezoaktoren

In der Adaptronik werden zur Schwingungsunterdrückung sehr oft Piezoaktoren genutzt [2, 5, 69, 71, 90, 108, 110, 143]. Sie sind in der Lage, große Kräfte bzw. Momente zu erzeugen und zeichnen sich durch eine hohe Bandbreite im kHz -Bereich aus. Piezoaktoren können ähnlich

wie die Piezosensoren in verschiedenen Bauformen hergestellt werden und sind dadurch an nahezu jeder beliebigen Stelle in die zu regelnde Struktur integrierbar.

Die Arbeitsweise des Piezoaktors basiert auf dem inversen Piezoeffekt, bei dem die Einwirkung einer elektrischen Spannung auf den Kristall dessen Extraktion/Kontraktion bewirkt. Der daraus resultierende Freihub Δl_0 eines hier analysierten Piezostapelaktors ohne externe Belastung kann aus der Formel

$$\Delta l_0 \approx n_a \cdot d_{33} \cdot E_a \cdot l_0 = n_a \cdot d_{33} \cdot U_a \quad (5.4)$$

ermittelt werden, wobei n_a die Anzahl der Piezoscheiben, d_{33} der Piezomodul in der Longitudinalrichtung ($500 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}$ für den eingesetzten Stoff), E_a die elektrische Feldstärke [V/m], l_0 die Dicke der Piezoscheibe im neutralen Zustand ($0,5 \text{ mm}$) und U_a die angelegte Spannung ($0 : -1000 \text{ V}$) bezeichnen. Wie schon erwähnt, bedarf ein Piezoaktor einer mechanischen Vorspannung, um den Hub in eine Kraft umsetzen zu können. Diese mechanische Vorspannung kann durch eine Feder mit der Steifigkeit k_v und eine Kraft f_v beschrieben werden. Die Steifigkeit der Vorspannfeder k_v soll den Wert von 10 % der Piezostapelsteifigkeit nicht überschreiten. Die Vorspannkraft f_v kann dabei höchstens 20 % der Druckbelastbarkeit des Piezostapels betragen, da es sonst zu einer Depolarisation des Materials kommen kann [34]. Die effektive durch den Piezoaktor erzeugte Kraft f_a unter einer mechanischen Vorspannung, charakterisiert durch eine Steifigkeit k_v , kann wie folgt berechnet werden

$$f_a \approx k_a \cdot \Delta l_0 \cdot \left(1 - \frac{k_a}{k_a + k_v}\right) = k_a \cdot n_a \cdot d_{33} \cdot \left(1 - \frac{k_a}{k_a + k_v}\right) \cdot U_a, \quad (5.5)$$

wobei k_a die aus den Materialeigenschaften und der Bauart resultierende Steifigkeit des Piezoaktors bezeichnet. Im spannungsgesteuerten Betrieb von Piezoaktoren tritt eine Hysterese auf, die durch z.B. Ladungssteuerung reduziert oder durch die Positionsregelung eliminiert werden kann. Die Breite der Hysterese kann bis zu maximal 15 % der tatsächlichen Längenänderung betragen [34].

Der Piezoaktor wurde in den aktiven Arm des parallelen Manipulators FÜNFGELENK, dargestellt in Bild 5.3, integriert [51, 109]. Die mechanische Vorspannung wurde durch eine Vorspannschlaufe aus einem CFK-Material erzeugt, welche weicher als der Piezoaktor $k_a = 113,32 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ und das CFK-Rohr $k_r = 50,27 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ entworfen wurde. Ihre Steifigkeit betrug $k_{vs} = 11,52 \cdot 10^6 \text{ N/m}$. Da aber das CFK-Rohr eine endliche Steifigkeit besitzt, ergibt sich die gesamte Steifigkeit der mechanischen Vorspannung k_v aus einer Reihenschaltung der beiden Steifigkeiten k_{vs} und k_r [51]. Sie beträgt, ohne den Einfluss der

Vorspannkraft f_v

$$k_v = \frac{k_{vs} \cdot k_r}{k_{vs} + k_r} = 9,37 \cdot 10^6 \text{ N/m}. \quad (5.6)$$

Die Vorspannkraft kann mit Hilfe eines Spannapparates eingestellt werden und sollte für das benutzte Material, auf Grund der angesprochenen Effekte, den Wert von $f_{vmax} = 20,1 \text{ kN}$ nicht überschreiten. Die Kraft f_{vmax} darf auch wegen der Knickbelastbarkeit des CFK-Rohres nicht überschritten werden.

In Bild 5.6 wurde die Krafterzeugung des Piezoaktors f_a in Abhängigkeit von der Vorspannkraft f_v dargestellt. Für die Experimente wurde ein Piezostapel PSt 1000/16/80 und ein linearer Ladungsverstärker LE 1000/035 der Firma Piezomechanik eingesetzt [101, 102]. Es

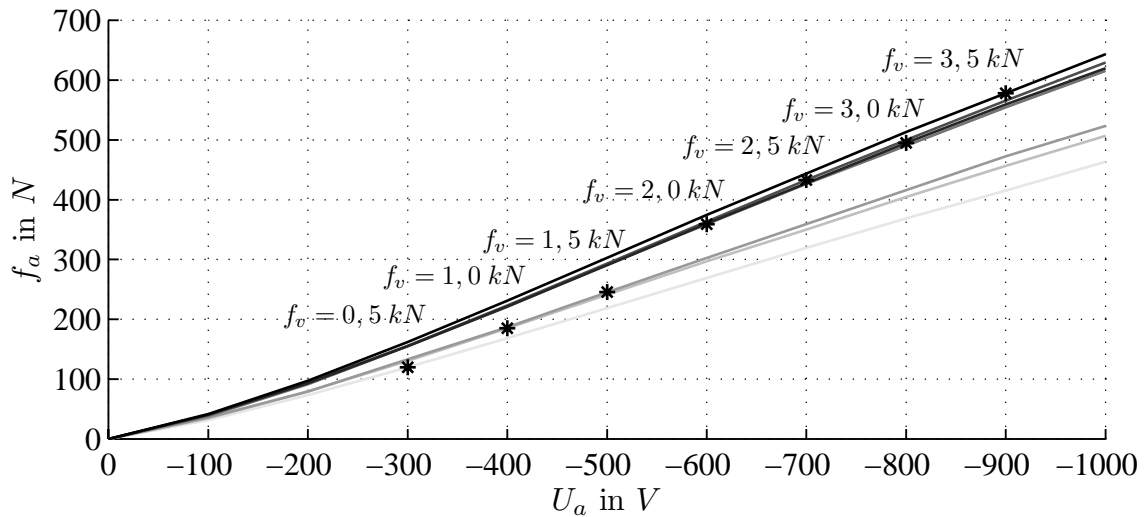


Bild 5.6: Einfluss der Vorspannkraft auf die Krafterzeugung des Piezoaktors

kann beobachtet werden, dass die Vorspannkraft ab einem Wert von $f_v = 2 \text{ kN}$ einen relativ kleinen Einfluss auf die erzeugte Kraft f_a zeigt. Dieses Resultat ist darauf zurückzuführen, dass die Änderung der Spannapparatlänge einerseits die Vorspannschlaufe gedehnt hatte, andererseits aber das CFK-Rohr gestaucht wurde, so dass sich die gesamte Steifigkeit der mechanischen Vorspannung gemäß der Formel (5.6) relativ geringfügig änderte. Einer Änderung der Vorspannkraft um $\pm 0,5 \text{ kN}$ entsprach in diesem Bereich eine Änderung der erzeugten Kraft um maximal $\pm 5 \%$. Dieser Umstand ist wichtig hinsichtlich der Empfindlichkeit des CFK-Stoffes auf Temperaturänderung, worauf bereits in Abschnitt 5.4.1 eingegangen wurde. Die Experimente zeigten, dass die betriebsbedingte Temperaturänderung des aktiven Armes eine Änderung der Vorspannkraft kleiner als $\pm 0,5 \text{ kN}$ zur Folge hatte, so dass deren Einfluss

auf die erzeugte Kraft f_a vernachlässigt wurde. Die Untersuchungen zeigten ebenfalls, dass die Hysterese des Piezoaktors vernachlässigbar klein ist, so dass eine lineare Aktorcharakteristik angenommen wurde. Als Vorspannkraft wurde die Kraft von $f_v = 3\text{ kN}$ eingestellt. Die erzeugte Kraft bei einem Freihub von ca. $70\text{ }\mu\text{m}$ betrug, abhängig von dem aktiven Arm, maximal ca. $f_a = 650\text{ N}$. Der Bereich des Aktors wurde dabei so eingestellt, dass der Piezoaktor symmetrisch arbeiten und so Kräfte im Bereich von maximal $\pm 325\text{ N}$ erzeugen konnte. Die Piezoaktoren wurden kalibriert und in den weiteren Untersuchungen eingesetzt.

6 Regelung elastischer Roboterstruktur

6.1 Problemstellung der Regelung

Eine der Hauptforderungen an Regelungsverfahren für elastische parallele Manipulatoren ist die nach möglichst kurzen Arbeitszykluszeiten. Diesem Ziel dient ebenfalls die Minimierung der Strukturmasse des Manipulators, um höhere Beschleunigungen und Geschwindigkeiten zu erreichen [67, 68]. Die reduzierte Masse erhöht jedoch gleichzeitig die Schwingungsanfälligkeit der Roboterstruktur. Das führt wiederum ohne eine geeignete Steuerungs- bzw. Regelungsstrategie zu längeren Zykluszeiten, da der Manipulator erst dann weiter das Programm ausführen kann, sobald die Schwingungen seiner Struktur auf ein akzeptables Maß abgeklungen sind. Eine weitere Forderung bzw. Begrenzung für eine solche Regelung ergibt sich aus der Genese der Schwingungsentstehung in der Roboterstruktur. Sie werden nämlich durch Ereignisse erzeugt, welche keinen permanenten Charakter in Bezug auf die Frequenz und die Amplitude aufweisen. Zu solchen Ereignissen gehören grundsätzlich

- das Durchfahren einer „unstetigen“ Trajektorie,
- die Aufnahme/Ablage einer Last und
- die Kontaktaufnahme mit der Umgebung.

Dabei sind hier nur die beiden ersten Fälle von Interesse, da die Kontaktaufnahme mit der Umgebung durch die Algorithmen der Kraftregelung behandelt wird [104]. Das Durchfahren einer „unstetigen“ Trajektorie induziert Schwingungen in der Roboterstruktur [40, 42]. Die Bezeichnung „unstetig“ bezieht sich auf alle Hauptkomponenten der Trajektorie, was aber letztendlich auf die Stetigkeitseigenschaften des Beschleunigungsverlaufes zurückgeführt werden kann. Bei steigender Stetigkeit der Trajektorie können nämlich die angeregten Strukturschwingungen auf Grund ihrer Amplitude und der geforderten Positionierungsgenauigkeit vernachlässigt werden, so dass keine zusätzliche Regelung mehr nötig sein wird. Diese Problematik wird im Folgenden genauer diskutiert. Die Aufnahme oder Ablage einer Last entspricht im Grunde genommen einer sprunghaften Parameteränderung des Systems, wodurch alle Eigenfrequenzen der Struktur angeregt werden. Die entstandenen Schwingungen müssen dann

durch eine Regelung unterdrückt werden, um zeitoptimale Arbeitszyklen zu gewährleisten [64].

Der ereignisbedingte Charakter der Schwingungsentstehung, die Forderung nach zeitoptimaler Schwingungsunterdrückung und das nichtlineare Robotermodell begrenzen die Gruppe der in Frage kommenden Regelungsverfahren. Die Algorithmen zur Schwingungsunterdrückung aus den Bereichen des Maschinenbaus, der Flugzeug- oder Fahrzeugtechnik, wo diese Problematik ausführlich behandelt wird, können nur eingeschränkt übernommen werden, da in diesen Bereichen meistens Anregungen auftreten, die in ihrem Charakter dauerhaft vorhanden und in ihrer Frequenz veränderlich sind. Aus diesem Grund müssen die entstandenen Schwingungen oft mit Hilfe von adaptiven Regelungsalgorithmen unterdrückt werden [16, 71, 82, 90]. Die Adaption der Regelung an das System nimmt aber zusätzliche Zeit in Anspruch, wodurch solche Lösungen prinzipiell durch das Zeitkriterium ausgeschlossen werden. Die modellbasierten Algorithmen benötigen dagegen im Allgemeinen keine Adaptation und ermöglichen theoretisch das Erreichen einer konstanten Regelgüte über den gesamten Arbeitsraum des Manipulators. Aus diesem Grund sind sie für diese Art der Regelung, trotz ihrer Komplexität, geeignet. Ein weiteres Problem bei der Regelung ist mit der Wahl der Aktoren verbunden. Wie schon im Abschnitt 1.2.2 erwähnt, können zu diesem Zweck sowohl die Antriebe als auch zusätzliche adaptronische Aktoren verwendet werden. Der Einsatz der Antriebe zur Strukturregelung paralleler Manipulatoren zieht im Vergleich zu den seriellen Robotern gewisse Komplikationen nach sich. Abgesehen von der begrenzten Bandbreite sind die durch die Antriebe erzeugten Kräfte proportional zur reduzierten Masse der Roboterstruktur und damit deutlich niedriger, als das bei den seriellen Manipulatoren der Fall ist [25, 33, 87, 88, 105, 133, 147]. Die Antriebe werden im Gegensatz zu den seriellen Kinematiken nicht immer an die elastischen Arme des Roboters direkt angeschlossen, wie z.B. beim Versuchsträger FÜNFGELENK, wodurch die Antriebe hinsichtlich der Schwingungsmoden an Autorität verlieren. Die im Abschnitt 5.4.4 besprochenen Piezoaktoren ermöglichen es, diese Komplikationen zu vermeiden. Sie werden deswegen sehr oft zur Schwingungsunterdrückung eingesetzt. Diese Art der Aktoren kann an die Roboterstruktur und die Schwingungsmoden angepasst werden, was den Reglerentwurf unter Umständen weiter vereinfachen kann [30, 31, 107, 144].

Die Singular-Perturbation-Methode ermöglicht es, die Vorgehensweise beim Reglerentwurf für elastische Manipulatoren zu vereinfachen [75, 119]. Unter der Annahme, dass sich die Zeitkonstanten der Bewegung und der Schwingungen der Roboterstruktur in verschiedenen Bereichen des Zeitmaßstabes befinden, d.h. ein System ist hinsichtlich der jeweiligen Zeitkonstanten schneller bzw. langsamer als das andere, kann das gesamte System in zwei Subsysteme aufgeteilt werden. Der Reglerentwurf für beide Teilsysteme, den Starrkörper

und die elastische Struktur, kann danach separat durchgeführt werden. Diese Vorgehensweise wurde bereits auf Basis der seriellen elastischen Manipulatoren sowohl bei Nutzung der Antriebe als auch der Piezoaktoren bestätigt [42, 119]. Es wurde gezeigt, dass die Regelungsalgorithmen für die Roboterbewegung und Strukturregelung beliebig kombiniert und unabhängig voneinander dimensioniert werden können. Die Untersuchungen haben eine gute Regelqualität und Anwendbarkeit dieser Lösung aufgezeigt [145]. Die ersten Untersuchungen zu den separaten Regelungsstrategien wurden bereits auf elastischen parallelen Manipulatoren durchgeführt. Zu diesem Zweck wurden sowohl Piezostapel als auch Piezostreifen verwendet [4, 5, 15, 108, 118, 139, 140]. Die Effizienz der Adaptronik wurde in diesem Bereich ebenfalls bestätigt. Aus diesem Grund wurde diese Vorgehensweise auch bei dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten und in diesem Kapitel vorgestellten Regelungskonzept verfolgt.

6.2 Bahnplanung kontra Schwingungen

Die komplexe Aufgabe der Bahnplanung besteht im Allgemeinen in der Berechnung einer optimalen Trajektorie des Endeffektors zwischen zwei Punkten im Arbeitsraum des Manipulators. Sie wird im Allgemeinen im Hinblick auf ein Gütekriterium optimiert. Als Gütekriterium wird für industrielle Manipulatoren zumeist die Minimierung der Zeit gefordert, eine so genannte zeitoptimale Bahnplanung. Eine Trajektorie stellt einen mit der Zeit parametrisierten geometrischen Pfad im Raum dar. Der Pfad wird in kartesischen Koordinaten unter Berücksichtigung der Begrenzungen des Arbeitsraumes und der gestellten Aufgabe definiert [42, 63]. Die Parametrisierung mit der Zeit erfolgt auf der Basis der Kennwerte des Manipulators, wie dem maximalen Ruck der Antriebe, der maximalen Beschleunigung und Geschwindigkeit. Auf diese Weise wird dem geometrischen Pfad ein zeitlicher Beschleunigungsverlauf des Endeffektors zugewiesen. Der Verlauf des Weges ist vorgegeben und die Geschwindigkeit folgt aus dem Beschleunigungsverlauf. Diese drei Verläufe zusammen beschreiben eine Trajektorie in den Aufgabenkoordinaten eindeutig. Dieser Teil der Bahnplanung ist in seiner Vorgehensweise von der Art des Manipulators unabhängig. Daher müssen nur die Kennwerte des Manipulators berücksichtigt werden. Um diese Trajektorie in die Bewegung des Manipulators umzusetzen, werden gemäß Abschnitt 4.3.1 die Kräfte/Momente der Antriebe aus der inversen Dynamik berechnet. Zu diesem Zweck muss aber zuerst die zunächst abstrakt in kartesischen Koordinaten definierte Trajektorie mit Hilfe der inversen Kinematik in die verallgemeinerten Koordinaten des Manipulators umgerechnet werden.

Die zeitoptimale Bahnplanung wird ohne Begrenzung der Allgemeinheit am Beispiel einer ptp-Trajektorie (engl. point-to-point), die nicht nur akademischer Natur ist, besprochen. Sie

stellt im freien Raum den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten dar. Ein solcher geometrischer Pfad muss dann zeitoptimal parameterisiert werden. Dies wird grundsätzlich durch einen Beschleunigungsverlauf erreicht, in dem die Antriebe unter Berücksichtigung der konstruktiven Beschränkungen maximal beschleunigen, sich mit maximaler Geschwindigkeit bewegen und anschließend am Ende der Trajektorie maximal bremsen. Alle Antriebe des Manipulators starten und beenden ihre Bewegung gleichzeitig, so dass sie sich nach dem langsamsten Antrieb richten, eine so genannte synchrone Bewegung. Eine asynchrone Bewegung, bei der alle Antriebe mit ihren maximalen Werten beansprucht werden, ist ebenfalls möglich. Sie ist aber wenig sinnvoll, da die Zeit konstant bleibt, der Energieverbrauch steigt und sich der geometrische Pfad ändert. Aus diesen Gründen wird eine synchrone Bewegung der Antriebe vorausgesetzt. In Bild 6.1 ist ein Beispiel einer solchen ptp-Trajektorie gezeigt. Das Bild 6.1(a) zeigt den Pfad zwischen dem Anfangspunkt p^A und dem Endpunkt p^E . Der Zeitverlauf des Ruckes $r(t)$ und der Beschleunigung $a(t)$, die dieser Trajektorie entsprechen, können Bild 6.1(b) entnommen werden. Alle Diagramme beziehen sich auf den Endeffektor und wurden für die Kennwerte des parallelen Manipulators FÜNFGELENK berechnet. Der Beschleunigungsverlauf $a(t)$, in Bild 6.1(b), nimmt hier eine Trapezform an. Einer zeit-

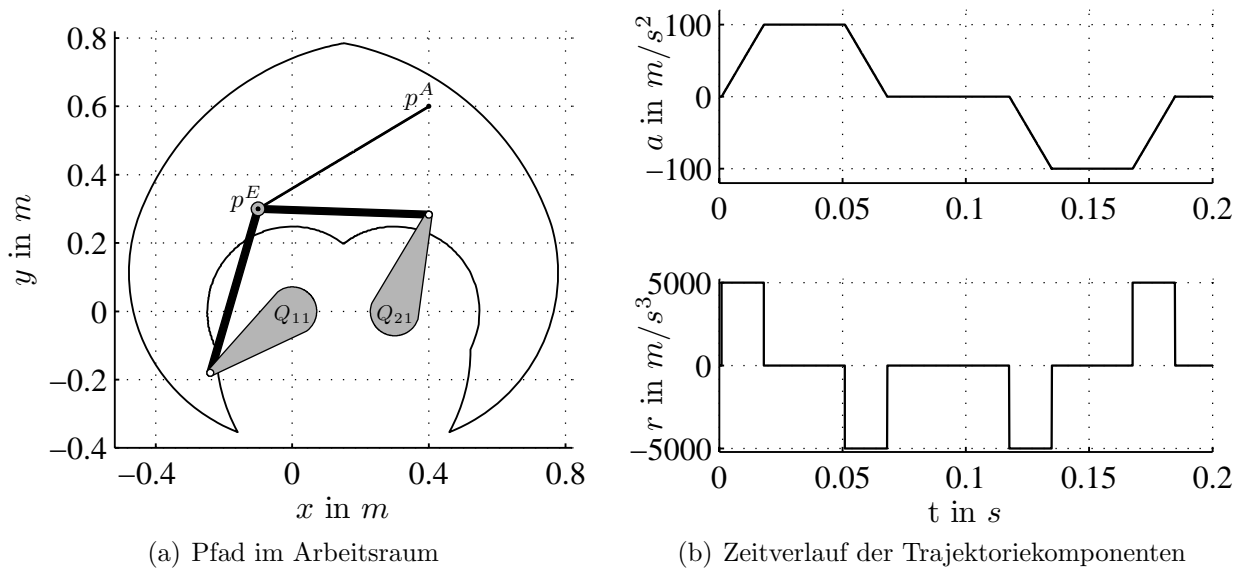


Bild 6.1: Zeitoptimale ptp-Trajektorie

optimalen Trajektorie würde eigentlich eine sprunghafte Änderung der Beschleunigung entsprechen [40]. Dies ist aber in realen mechanischen Systemen nicht realisierbar, da der Ruck des Antriebes, die Änderung der Beschleunigung, begrenzt ist. Aus diesem Grund wird der trapezförmige Beschleunigungsverlauf als reales Ergebnis der zeitoptimalen Bahnplanung für reale Starrkörperroboter angenommen. Die sprunghafte Änderung der Beschleunigung

wird jedoch oft in Simulationen benutzt, um die Eigenschaften und die Leistungsgrenzen des modellierten Manipulators zu untersuchen.

Die Aufgabe der zeitoptimalen Bahnplanung wird komplizierter, wenn die elastischen Moden eines Manipulators berücksichtigt werden sollen. Während der Bewegung solcher Manipulatoren treten zwei Effekte auf: Deformationen und Schwingungen der Roboterstruktur. Die Deformationen der Elemente ändern die Geometrie der Struktur. Sie müssen deswegen bei der Bahnplanung berücksichtigt werden, um die geforderte Positionierungsgenauigkeit der Maschine zu gewährleisten. Hierzu kann eine so genannte quasi-statische Deformationskompensation durchgeführt werden [42]. Die Schwingungen, die hier im Vordergrund stehen, führen zu einer Verlängerung der Zykluszeiten, da der Manipulator die nächste Operation am Ende seiner Trajektorie erst dann ausführen kann, wenn die Amplitude der Schwingungen kleiner als die geforderte Positionierungsgenauigkeit ist. Die gesamte Fahrzeit des Manipulators setzt sich somit aus der Zeit der Bewegung und der Abklingzeit der hervorgerufenen Schwingung zusammen und muss minimiert werden. Hier bieten sich zwei Ansätze an: einer davon ist die Strukturregelung und der zweite die Bahnplanung. Beide Lösungen ermöglichen gemeinsam die Realisierung der zeitoptimalen/zyklusoptimalen Trajektorie für einen elastischen Manipulator.

Die Bahnplanung bietet sich als Möglichkeit an, die Amplitude der entstandenen Schwingungen so zu reduzieren, dass diese Schwingungen auf Grund der geforderten Positionierungsgenauigkeit vernachlässigt werden können. Die Ordnung der Reduktion hängt dabei von der Stetigkeit der Trajektorie ab. Je stetiger/glatte die Trajektorie ist, desto kleiner sind die angeregten Schwingungen. Da bei der Generierung einer Trajektorie ein geometrischer Pfad durch einen Beschleunigungsverlauf parametrisiert wird, werden die Stetigkeitsanforderungen direkt an den Beschleunigungsverlauf gestellt [32]. Dieser Verlauf setzt sich dabei aus verschiedenen Funktionen zusammen, die stückweise miteinander verbunden sind. Als Funktionen können Polynome, Spline-Funktionen oder sinusverwandte Funktionen verwendet werden [40, 42, 100]. Der Beschleunigungsverlauf muss dazu so gestaltet werden, dass die Anregung der Eigenfrequenzen des elastischen Manipulators vermieden wird. Diese Aufgabe ist nicht trivial, da sich die Eigenfrequenzen der Roboterstruktur im Arbeitsraum abhängig von der Pose des Manipulators ändern. Die Steigerung der Trajektorienstetigkeit bleibt aber nicht ohne negative Folgen. Der Zeitbedarf solcher Trajektorien steigt ebenfalls. Trotzdem kann eine solche glatte Trajektorie weniger Zeit in Anspruch nehmen, als die Ausführung einer weniger stetigen aber schnelleren Trajektorie mit anschließender Strukturregelung, welche die entstandenen Schwingungen ausregeln muss. Aus dieser Überlegung kann ein Kriterium für die Regelung der Strukturschwingungen elastischer Manipulatoren formuliert werden:

Die gesamte Zeit der Bewegung t_{x-n-1} eines elastischen Manipulators mit der Trajektorie der Klasse C^{x-n-1} und anschließender Strukturregelung ist zyklusoptimal, wenn t_{min} kleiner ist als sowohl die gesamte Zeit t_{x-n} einer Trajektorie der Klasse C^{x-n} einschließlich, falls nötig, derselben Strukturregelung als auch die Zeit t_x der glatten Trajektorie der Klasse C^x , welche auf Grund der geforderten Positionierungsgenauigkeit keine zusätzliche Strukturregelung benötigt.

$$t_{min} = t_{x-n-1} \iff t_{x-n-1} < (t_{x-n} \leq t_x), \quad \forall x, n \in \mathbb{N}_0 \wedge x \geq 1 \wedge n \geq 0 \wedge x > n \quad (6.1)$$

Die Klasse der Trajektorie C^x bezieht sich hier auf den Beschleunigungsverlauf, der x stetig differenzierbare Ableitungen besitzt. Das Kriterium prüft hauptsächlich, ob sich aus der Kombination einer Trajektorie mit geringeren Stetigkeitsanforderungen zusammen mit einer Regelung eine kürzere Zykluszeit, als die einer glatten Trajektorie ohne Regelung ergibt. Dieses Kriterium ermöglicht auf einfache Weise die Überprüfung der Effizienz einer Strukturregelung.

Der Einfluss der Trajektoriестетigkeit auf die Schwingungsanregung in der Roboterstruktur wurde am Modell des ebenen elastischen parallelen Manipulators - FÜNFGELENK untersucht. Das Robotermodell wurde gemäß den Angaben und Annahmen aus Abschnitt 4.7 hergeleitet. Es wurde ein langer geradliniger Pfad, gezeigt in Bild 6.1(a), gewählt. Dieser ermöglichte dem Manipulator den maximalen Ruck r_{max} , die maximale Beschleunigung a_{max} und die maximale Geschwindigkeit v_{max} zu erreichen. Dieser Pfad wurde mit drei, in Hinsicht auf die Stetigkeit, unterschiedlichen Beschleunigungsverläufen parameterisiert. Diese Verläufe wurden dabei stückweise aus konstanten und variablen Übergangsfunktionen zusammengestellt. Als variable Übergangsfunktionen wurden Funktionen folgender Stetigkeitsklassen:

$$C^0 : \quad a(t) = a_{max}t \quad (6.2)$$

$$C^1 : \quad a(t) = a_{max}(1 + \cos(\omega t)) \quad (6.3)$$

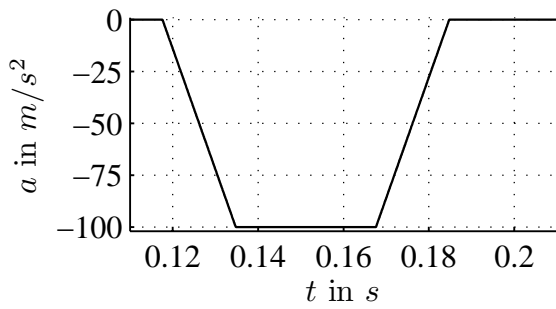
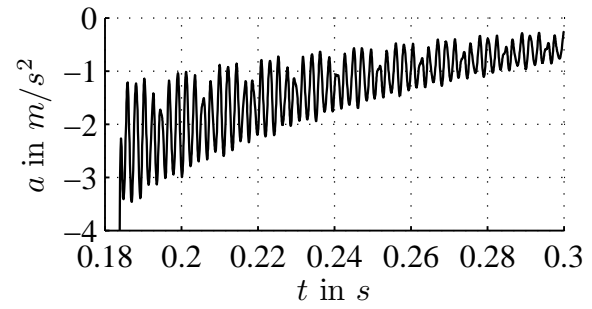
$$C^2 : \quad a(t) = \frac{r_{max}}{2\omega}(\omega t - \sin(\omega t)) \quad (6.4)$$

eingesetzt, wobei ω die Kreisfrequenz der trigonometrischen Funktion bezeichnet. Die Klasse C^0 kennzeichnet die linearen Funktionen. Die Klassen C^1 und C^2 wurden mit Hilfe von sinusverwandten Funktionen realisiert. Der Einsatz der sinusverwandten Funktionen hat den großen Vorteil, dass - bei Kenntnis der von der Pose abhängigen Eigenfrequenzen der elastischen Roboterstruktur - genau jene Kreisfrequenzen vermieden werden können, welche

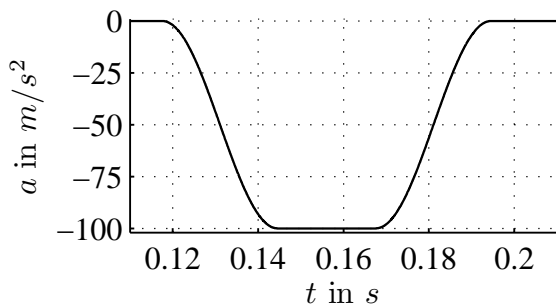
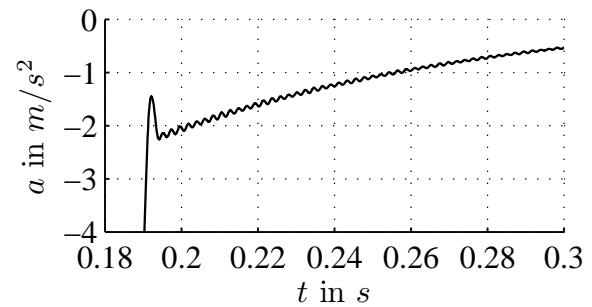
die Schwingungen anregen. Diese Möglichkeit ist beim Einsatz von Polynomen oder Spline-Funktionen in dieser expliziten Form nicht gegeben.

In Bild 6.1(b) ist der Betrag eines kompletten, trapezförmigen, vom Bahnplaner generierten Beschleunigungsverlaufes gezeigt. Seine Bremsphase ist zusätzlich in Bild 6.2(a) dargestellt. Zum Vergleich sind ebenfalls die Bremsphasen der C^1 - und C^2 -Trajektorien jeweils in den Bildern 6.2(c) und 6.2(e) gezeigt. In den Bildern 6.2(b), 6.2(d) und 6.2(f) ist das simulierte Verhalten des elastischen Manipulators am Ende der jeweiligen C^0 -, C^1 - und C^2 -Trajektorie als Beschleunigungsbetrag des Endeffektors dargestellt. Da die Antriebsmomente für das elastische Modell aus dem Starrkörpermodell berechnet wurden, was gängige Praxis ist, befand sich der Endeffektor am Ende der Trajektorie nicht in seiner Ruhelage. Die Diskrepanz der beiden Modelle und damit der Antriebsmomente, führte zu einer Restbewegung des Endeffektors am Ende der Trajektorie. Das hatte aber keinen Einfluss auf die entstandenen Schwingungen, da nicht die Bewegung sondern die Art ihrer Änderung die Vibrationen beeinflusst. Die Lageregelung des Manipulators war ausgeschaltet, um die potenziellen Einflüsse anderer Faktoren auf das Schwingungsverhalten auszuschließen. Diese simulativen Ergebnisse bestätigen die Korrelation zwischen der Stetigkeit der Trajektorie und der Induktion der Schwingungen in der Roboterstruktur. Im Fall der zeitoptimalen C^0 -Trajektorie in Bild 6.2(b) sind die Schwingungen stark ausgeprägt. Eine Strukturregelung muss eingeschaltet werden. Der Einsatz derselben Regelung ist bei der C^1 -Trajektorie, in Bild 6.2(d), von den Genauigkeitsanforderungen abhängig. Falls aber die Strukturregelung eingeschaltet werden soll, wird die Zykluszeit kürzer sein, da die Amplitude der Schwingungen, im Vergleich zu der C^0 -Trajektorie, kleiner ist. In Bild 6.2(f) ist das Ergebnis der C^2 -Trajektorie dargestellt. Die Schwingungen sind kaum zu erkennen. Abhängig von den Anforderungen an die Genauigkeit können die restlichen Schwingungen entweder vernachlässigt oder aktiv unterdrückt werden. Bei der Annahme, dass die restlichen Schwingungen vernachlässigt werden können, wäre die Zeit dieser Trajektorie die Referenz gemäß dem Kriterium (6.1) für die Bestimmung der zyklusoptimalen Regelung der Strukturschwingungen.

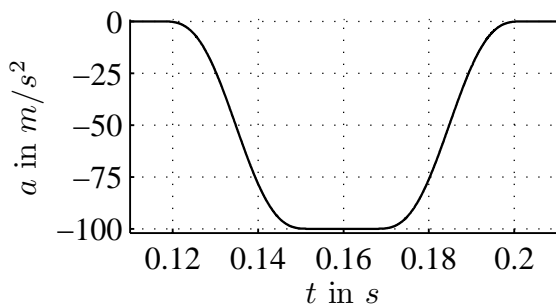
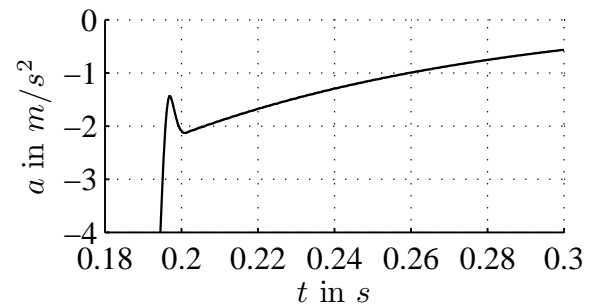
Zusätzlich wurde für die C^2 -Trajektorie der Einfluss der Lageregelung des Manipulators auf die Anregung der Schwingungen untersucht. Gemäß der Singular-Perturbation-Methode soll diese Regelung die Schwingungen in der Roboterstruktur nicht anregen. Als Regelalgorithmus wurde die Methode der berechneten Momente (engl. Computed-Torque-Method Feed-Forward) mit einem PD-Regler für jeden Antrieb gewählt [121]. In Bild 6.2(h) ist das Ergebnis der Simulation dargestellt. Die Vergrößerung zeigt, dass die Lageregelung erwartungsgemäß keine zusätzlichen Schwingungen hervorruft. Es ist ebenfalls keine Restbewegung des Endeffektors zu registrieren. Die Wahl der Art der Starrkörperregelung für elastische Manipulatoren muss dennoch sorgfältig durchdacht werden, um Regelungsverfahren auszu-

(a) Trajektorie: Trapezförmig C^0 -Klasse

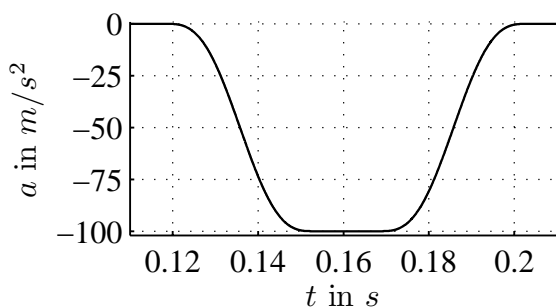
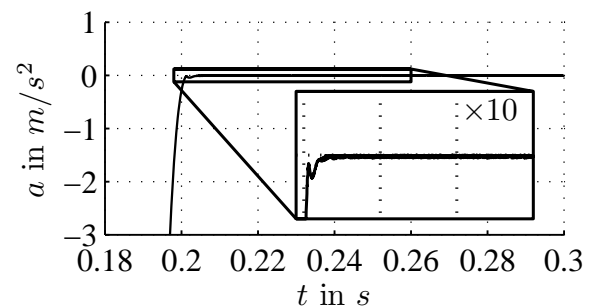
(b) Antwort am Endeffektor

(c) Trajektorie: Sinusverwandt C^1 -Klasse

(d) Antwort am Endeffektor

(e) Trajektorie: Sinusverwandt C^2 -Klasse

(f) Antwort am Endeffektor

(g) Trajektorie: Sinusverwandt C^2 -Klasse

(h) Antwort am Endeffektor

Bild 6.2: Einfluss der Bahnplanung und Lageregelung auf die Schwingungsanregung

schließen, die sprungförmige Änderungen der Steuer- und Regelgrößen bewirken könnten.

Abschließend werden in Tabelle 6.1 die Zeiten der jeweilig untersuchten Trajektorien verglichen. Es ist die Dauer der jeweiligen Trajektorie ohne jegliche Regelung in ms , die Differenz in Bezug auf die C^0 -Trajektorie in ms und der daraus resultierende prozentuale Betrag angegeben. Bei ausreichend langen Trajektorien sind die absoluten und auch prozentualen Unterschiede relativ gering. Sie wachsen aber mit der Verkürzung der Trajektorie. Bei den Trajektorien, die sich nur aus Beschleunigungs- und Bremsvorgängen zwischen ihren extremen Werten zusammensetzen, können sich diese Beträge um ca. das Zehnfache des angegebenen prozentualen Wertes erhöhen.

Form der Beschleunigung	Dauer [ms]	Differenz [ms]	Prozent [%]
Trapez: C^0 -Klasse	183,77	0,00	0,00
Sinusverwandt: C^1 -Klasse	193,56	9,79	5,33
Sinusverwandt: C^2 -Klasse	200,92	17,15	9,33

Tabelle 6.1: Zeitvergleich der Trajektorien

Rekapitulierend kann folgendes festgestellt werden: Die Bahnplanung spielt im Bereich der elastischen Manipulatoren eine wichtige Rolle und kann als eine der Komponenten der Strukturregelung angesehen werden. Bei der Wahl der Regelung und der Stetigkeitsklasse der Trajektorie sollte nach einem Kompromiss zwischen der Verfah- und der Ausregelzeit gesucht werden, so dass die gesamte Fahrzeit des Manipulators minimal bleibt, wobei die Länge der Trajektorie bei dieser Entscheidung nicht zu vernachlässigen ist.

6.3 Lineare Kennfeldregler (Gain-Scheduling-Controllers)

Die Erfassung eines komplexen nichtlinearen Systems in einem analytischen Modell ist kompliziert und arbeitsaufwendig. Es kommt nicht selten vor, dass auf Grund der Komplexität und der schwer zu bestimmenden Zusammenhänge eine ausreichend genaue analytische Beschreibung nicht realisierbar ist. Gelingt die Erstellung eines solchen analytischen Modells, kann seine Ordnung sehr hoch sein. Eine höhere Ordnung des Modells kann durchaus bei den elastischen parallelen Manipulatoren auftreten und war eine der Motivationen für die Entwicklung des in Abschnitt 4.5 vorgestellten Algorithmus. Ein ernstes Problem tritt bei der Berechnung solcher komplexen Modelle auf. Aufgrund ihrer Komplexität können sie zwar

in der Simulation, aber nicht immer in einer Regelung eingesetzt werden, da bei einer höheren Ordnung ebenfalls die zusätzlichen Maßnahmen zur Beschleunigung der Berechnung an ihre Grenzen stoßen würden. Ein fehlendes oder komplexes Modell macht eine effiziente Regelung solcher nichtlinearen Systeme höherer Ordnung kompliziert, wenn nicht sogar unmöglich [134]. Letztendlich stellt die Identifikation der vielen verteilten Modellparameter eine weitere Komplikation dar [1, 76].

Die Regelungstechnik bietet für diese Klasse der Systeme eine Methode an, welche ihre effiziente Regelung ermöglicht. Sie wird als die Methode der linearen Kennfeldregler (engl. gain-scheduling-controllers) bezeichnet [75]. In dieser Methode wird der Konfigurationsraum eines Systems in Teilräume unterteilt, innerhalb derer das System als hinreichend linear angenommen werden kann. Im „Mittelpunkt“ eines solchen „linearen“ Teilraumes wird das System identifiziert und ein lineares Modell aufgestellt. Diese Vorgehensweise entspricht einer „Taylor“-Linearisierung des Systems in einem Arbeitspunkt. Eine beliebige lineare Regelung kann nun für diesen Arbeitspunkt ausgelegt werden und sie gilt für alle Punkte in diesem Teilraum. Nach dem Verlassen des Raumes wird auf die benachbarte Regelung stetig überblendet, die auf gleiche Weise für den Nachbarraum entworfen wurde. Auf diesem Weg kann ein nichtlineares System in seinem gesamten Arbeitsraum ohne eine explizite Kenntnis seines nichtlinearen Modells modellbasiert geregelt werden. Bei dem Austausch der relevanten, das dynamische Verhalten bestimmenden Komponenten muss jedoch das lineare Modell für jeden Arbeitspunkt neu erstellt werden, im Gegensatz zu einem nichtlinearen Modell, bei dem nur die betroffenen Parameter des Modells neu angepasst werden müssten.

Die Methode der linearen Kennfeldregler wurde vom DLR in Braunschweig auf dem ebenen elastischen parallelen Manipulator FÜNFGELENK implementiert und untersucht. Zur Regelung der Strukturschwingungen wurden LQR und H_∞ Regelungsverfahren eingesetzt. Es wurden dabei verschiedene Verfahren zur Teilung des Arbeitsraumes und zur Umschaltung zwischen den Reglern verwendet und untersucht [2, 3, 4, 5, 15, 51, 109, 132]. Die Ergebnisse bestätigten die Anwendbarkeit dieses Verfahrens zur Unterdrückung der Strukturschwingungen. Der große Vorteil dieser Methode ist die Möglichkeit der Nutzung der Standardverfahren zur Identifikation und Regelung linearer Systeme. Dadurch kann der Arbeitsaufwand in diesen beiden Bereichen deutlich reduziert und damit eine Regelung relativ einfach implementiert werden. Mit dieser Methode sind aber besonders in der Robotik gewisse Nachteile verbunden. Die eingesetzten Regler sind nur für einen Punkt im „linearen“ Teilraum optimal ausgelegt, so dass keine konstante Regelgüte für den gesamten Arbeitsraum garantiert werden kann. Die geforderte Regelgüte wird sich einem konstanten Wert erst bei einer steigenden Zahl von Teilräumen nähern, da das lineare Modell für einen kleineren Raum eine bessere Approximation darstellt.

In Bild 6.3 wird eine solche Arbeitsraumsegmentierung für den Manipulator FÜNFGELENK präsentiert. Es wurde ein trigonometrisches Kriterium der Teilung verwendet, in dem das Modell im Antriebswinkeländerungsbereich um $\pm 5 \text{ Grad}$ als linear angenommen wurde, was übliche Praxis bei der Linearisierung ist. Diese Segmentierung ergab 396 Punkte. Bei der An-

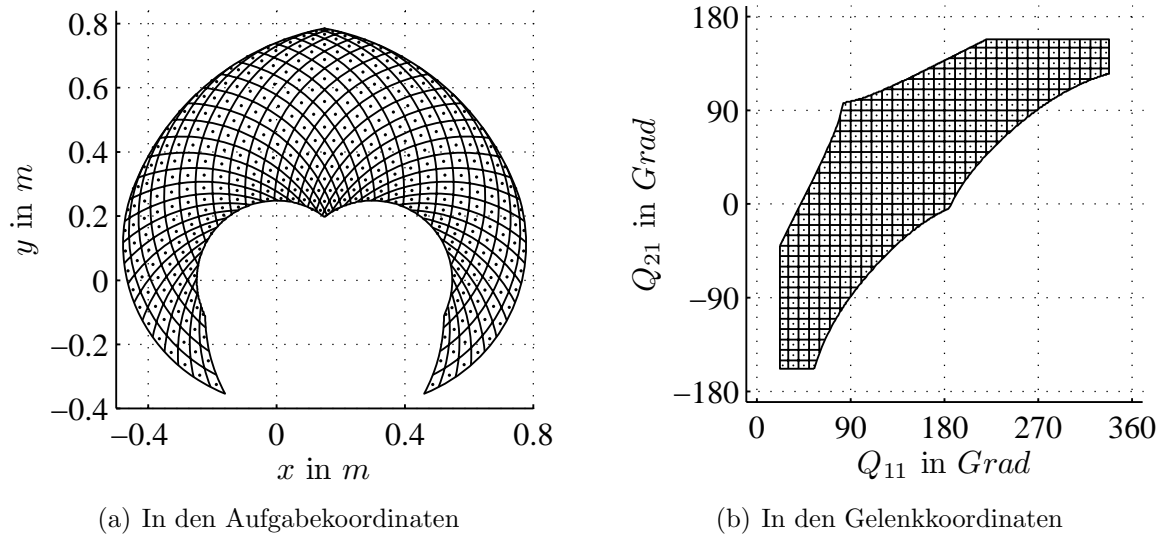


Bild 6.3: Arbeitsraumsegmentierung des Manipulators FÜNFGELENK

nahme eines symmetrischen Arbeitsraumes kann die Anzahl der Punkte um fast die Hälfte reduziert werden. Eine weitere Reduktion kann auf Grund der Analyse der Robotereigenschaften gemäß den Abschnitten 4.7.1 und 4.7.2 durchgeführt werden. Trotz dieser Maßnahmen kann aber noch eine hohe Zahl an Teilbereichen vorhanden sein. Zusätzlich zu der Arbeitsraumsegmentierung muss noch eine Segmentierung in jedem Arbeitspunkt hinsichtlich der Änderung der Last vorgenommen werden, was die Anzahl der ausgelegten Regler wieder erhöhen wird. Anschließend muss ein Verfahren zum Umschalten der Regler entworfen werden, das ebenfalls die Stabilität der Regelung garantiert. Ein weiteres Problem tritt bei der Bestimmung der Zugehörigkeitsbereiche der einzelnen Regler besonders in den Aufgabekoordinaten auf, wie das der Fall in der oben zitierten Literatur war. Die Ursache dafür ist die Form der „linearen“ Bereiche, gezeigt in Bild 6.3(a). Eine Hilfmaßnahme kann hier die Analyse des Arbeitsraumes in den Gelenkkoordinaten gemäß Abschnitt 3.4.2 sein, da hier die Form der Bereiche, gezeigt in Bild 6.3(b), geometrisch einfacher sein kann. Trotz der Vereinfachungen beim Reglerentwurf und bei der Identifikation können die angesprochenen Probleme, den Einsatz dieses Verfahrens bei elastischen Manipulatoren deutlich erschweren.

Die durchgeführte Diskussion führt zum Schluss, dass diese Methode beim industriellen Einsatz der elastischen Manipulatoren wegen ihrer niedrigen Flexibilität bei der Berücksichti-

gung von Parameteränderungen des Systems und variierender Regelgüte nur bedingt geeignet ist. Sie kann jedoch die Entwicklungsphase der Regelung effizient unterstützen. Mit dieser Methode können die entworfenen Ansätze für bestimmte Punkte im Arbeitsraum statisch und dynamisch relativ einfach untersucht werden. Die so gewonnenen Ergebnisse können dann für die Entwicklung der nichtlinearen modellbasierten Regelungen genutzt werden.

6.4 Nichtlineare Regelung

Eine konstante Regelgüte gehört zu den Hauptanforderungen an sowohl die Starrkörperregelung als auch die Strukturregelung eines elastischen Manipulators. Die Erfüllung dieser Forderung impliziert den Einsatz eines modellbasierten Regelungsverfahrens, was grundsätzlich zu einer Standardvorgehensweise in der Robotik gehört [7, 23, 87, 121, 133]. Bei den modellbasierten Verfahren wird die Kenntnis der Dynamikgleichungen des Manipulators verlangt. Die Dynamikgleichungen können dabei unterschiedlich eingesetzt werden. Sie können entweder zu einer exakten Linearisierung des Systems, was den Einsatz der linearen Regler ermöglicht, oder zu einer permanenten Anpassung der Regler an das System, was aber nicht mit der adaptiven Regelung verwechselt werden soll, genutzt werden. Die so „linearisierten“ Systeme können aber weiterhin ein nichtlineares Verhalten aufweisen, dessen Ausmaß von der Genauigkeit der Modelle abhängig ist. Die Regler müssen aus diesem Grund robust sein. Bei geringer Kenntnis der Modelle, wenn die Robustheit der Regler selbst nicht mehr ausreicht, müssen die Regelverfahren über zusätzliche Mechanismen verfügen, welche die Adaptation der Regelung an die quasi-bekannte Strecke ermöglichen würden [23, 134]. Da eine solche Art der Regelung infolge der Adaptation zusätzliche Zeit kostet, wurde sie hier nicht in Betracht gezogen. Es wurden nur modellbasierte Regelverfahren analysiert, bei denen das Modell bekannt und ausreichend genau ist. In diesem Abschnitt wird ein solches Regelungsverfahren entwickelt und untersucht. Diese Regelung wird dabei gemäß der Singular-Perturbation-Methode unabhängig von der Starrkörperregelung entworfen und ausgelegt.

6.4.1 Der lineare Regler

Der Reglerentwurf wird auf der Basis eines Singlemode-Modells einer Schwingung durchgeführt. Eine Grundlage für dieses Modell bildet der aktive Arm des parallelen Manipulators FÜNFGELENK, der als Quelle der Schwingungen in der Roboterstruktur, gemäß Abschnitt 2.1, angenommen wurde. Zusätzlich wird auf Grund der auftretenden Kräfte und der niedrigen

Masse des CFK-Rohres seine Longitudinalschwingung in der Richtung der Armlängsachse vorausgesetzt. Die Betrachtung nur einer Schwingungsmoden stellt dabei keine Begrenzung der Allgemeinheit dar, da die Regler für die anderen Moden auf gleiche Weise entworfen werden können. Nach dem Superpositionsprinzip können so entworfene Regler für ein lineares System zu einem kompakten Regler zusammengefasst werden [75, 79]. Die Anzahl der Moden, die berücksichtigt werden können, hängt nur von der Bandbreite der digitalen Schnittstellen und dem Stellweg (dem Hub) der Aktoren ab.

In Bild 5.3 ist der schematische Aufbau des aktiven Armes und in Bild 6.4(a) das zu diesem Aufbau gehörende vereinfachte Ersatzmodell dargestellt. Das Ersatzmodell setzt sich aus einem CFK-Rohr, einem Aktor des Stellweges x_a , einer Vorspannschlaufe der Steifigkeit k_{vs} und einem Sensor mit einer gemessenen Kraft f_s zusammen [47, 126]. Das CFK-Rohr wird dabei durch ein Feder-Masse-Dämpfer-Modell nach *Kelvin-Voigt* und seine Parameter, die Steifigkeit k_r , einen Dämpfungsfaktor d_r , eine Längenänderung x_r und eine Masse m beschrieben. Alle Federn in dem Modell werden als masselos angenommen. Die Orientierung des Koordinatensystems (x_0, y_0) und die Konvention des Vorzeichens kann Bild 6.4 entnommen werden.

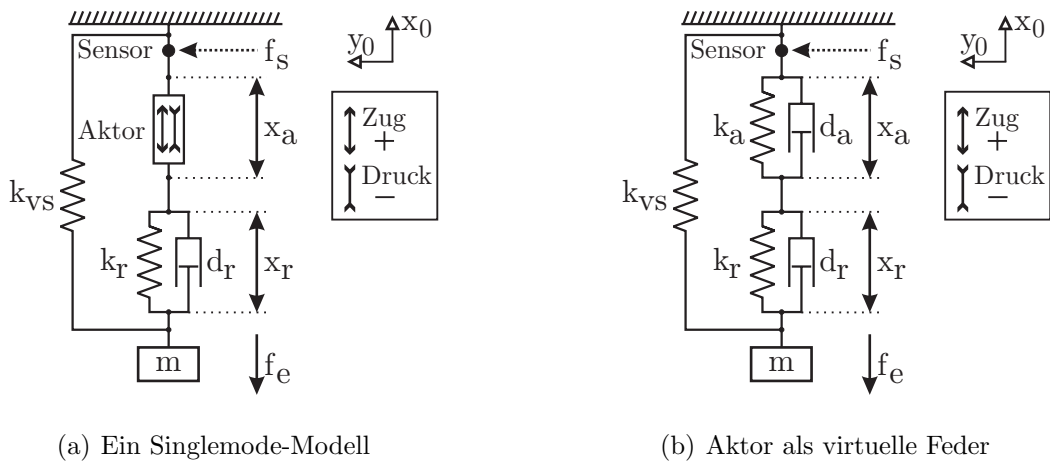


Bild 6.4: Reglerkonzept

Die Bewegungsgleichung für das Ersatzmodell kann mit Hilfe des *Lagrange-Formalismus*, gemäß Abschnitt 2.3.2, hergeleitet werden. Nach der Berücksichtigung der Dämpfung kann die Dynamikgleichung folgendermaßen geschrieben werden

$$m\ddot{x}_r + d_r\dot{x}_r + k_r x_r = v_r(-f_x - m\ddot{x}_a - k_{vs}(x_r + x_a)), \quad (6.5)$$

wobei v_r den Kopplungsfaktor des Systems bezeichnet. Dieser Faktor liegt im Bereich von $0 < v_r \leq 1$, da dieses Ersatzmodell ohne Regelung ein passives System darstellt. Zum Zweck

dieser Analyse wird er als $v_r = 1$ angenommen. Die auf das System einwirkende externe Kraft wird durch f_x bezeichnet. Sie setzt sich aus zwei Komponenten

$$f_x = f_e + mg \quad (6.6)$$

zusammen, wobei f_e die am Ende des aktiven Armes einwirkende Kraft und mg die Gravitationskraft beschreiben. Die Sensorgleichung, gekennzeichnet durch die Kraft f_s , lautet

$$f_s = -f_x - m(\ddot{x}_r + \ddot{x}_a) - k_{vs}(x_r + x_a). \quad (6.7)$$

Es wird nun nach einem Regler gesucht, der bei der Annahme einer niedrigen oder fehlenden Dämpfung des Systems $0 \leq d_r \ll d_{krit}$ eine zeitoptimale Schwingungsunterdrückung gewährleisten kann, wobei d_{krit} einen Dämpfungsfaktor im aperiodischen Grenzfall (2.78) bezeichnet. Außerdem wird eine einfache Struktur des Reglers und ein direkter Bezug auf die mechanischen Parameter des Manipulators verlangt. Der Bezug auf die mechanischen Parameter der Roboterstruktur ergibt sich aus der Tatsache, dass die Regelung bei ihrem Einsatz auf einem elastischen Manipulator dessen nichtlineares analytisches Modell zu der Anpassung ihrer Reglerparameter an das System nutzen soll. Das hat den Nachteil, dass die im digitalen System entstandene Phasenverschiebung vom Regler nicht berücksichtigt werden kann, so dass eine zusätzliche Kompensation separat entwickelt werden muss.

Reglerstruktur

Die Wahl der Reglerstruktur wurde durch die Methoden der passiven Schwingungsunterdrückung motiviert [27]. Bei diesen Methoden, welche vorwiegend für lineare Systeme eingesetzt werden, werden zusätzliche Feder-Dämpfer-Massen, die so genannten Tilger, an ein schwingungsfähiges System angeschlossen und so abgestimmt, dass die gewählten Eigenschwingungen des Systems unterdrückt werden. Ausgehend von dieser Vorgehensweise wird vom Aktor im Ersatzmodell ebenfalls ein federähnliches Verhalten gefordert, wodurch eine Feder mit sehr guter Dämpfung nachgeahmt werden soll. Das Verhalten des Aktors ist auf diese Weise dem Verhalten des Systems (6.5) ähnlich. Ein strukturorientierter Reglerentwurf liegt vor. Die Bewegungsgleichung des Aktors nimmt somit die Form

$$m\ddot{x}_a + d_a\dot{x}_a + k_ax_a = v_af_s \quad (6.8)$$

an, wobei d_a den virtuellen Dämpfungsfaktor, k_a die virtuelle Steifigkeit, x_a die Stellgröße (die Längenänderung des Aktors) und v_a die Verstärkung des Reglers bezeichnen. In Bild

6.4(b) ist der so entworfene Regler zusammen mit dem Ersatzmodell dargestellt. Da in der Formulierung (6.5) der Einfluss des Reglers auf das System hauptsächlich dem Produkt der Beschleunigung \ddot{x}_a und der schwingenden Masse m gleich ist, wird nach einer Übertragungsfunktion $G_a(s)$ zwischen dem Sensorsignal f_s und der besagten Beschleunigung \ddot{x}_a gesucht. Die *Laplace-Transformation* der Gleichung (6.8) und Anordnung der Ausdrücke führt zu folgender Übertragungsfunktion des Reglers

$$G_a(s) = \frac{\mathcal{L}\{\ddot{x}_a\}}{\mathcal{L}\{f_s\}} = \frac{v_a s^2}{m s^2 + d_a s + k_a}. \quad (6.9)$$

Die Suche nach der Reglerstruktur ergab, dass ein D_2T_2 -Glieder als Regler eingesetzt werden muss, um die gestellte Anforderung eines federähnlichen Verhaltens des Aktors zu erfüllen.

Parametrisierung des D_2T_2 -Reglers

Die Koeffizienten des Reglers sollen, aus den bereits genannten Gründen, in Abhängigkeit von den mechanischen Parametern des zu dämpfenden Systems (CFK-Rohres) angegeben werden. Sie sollen dabei eine möglichst schnelle Unterdrückung der Schwingungen garantieren. Die Ermittlung der Reglerparameter beginnt mit der Betrachtung der Übertragungsfunktion

$$G_s(s) = \frac{\mathcal{L}\{x_r\}}{\mathcal{L}\{f_x\}} \quad (6.10)$$

des geschlossenen Kreises. Da diese Übertragungsfunktion in Abhängigkeit von der externen Kraft f_x formuliert ist, muss die Aktorstellgröße \ddot{x}_a ebenfalls in dieser Abhängigkeit ausgedrückt werden, bevor sie in die Systemgleichung (6.5) eingesetzt wird. Zu diesem Zweck wird in der Reglergleichung (6.9) die Sensorkraft f_s durch die Sensorgleichung (6.7) substituiert und die Gleichung nach \ddot{x}_a aufgelöst

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}_a\} = -\frac{v_a(f_x s^2 + m s^4 x_r + k_{vs} s^2 x_r)}{m(1 + v_a)s^2 + d_a s + (k_a + k_{vs} v_a)}. \quad (6.11)$$

Das Einsetzen der Gleichung (6.11) in die Systemgleichung (6.5) und ihre Auflösung führt zu der Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises

$$G_s(s) = \frac{\mathcal{L}\{x_r\}}{\mathcal{L}\{f_x\}} = -\frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \quad (6.12)$$

wobei

$$\begin{aligned}
a_2 &= v_r m, \\
a_1 &= v_r d_a, \\
a_0 &= v_r k_a, \\
b_4 &= m^2(1 + v_a - v_a v_r), \\
b_3 &= m(d_a + d_r + d_r v_a), \\
b_2 &= d_r d_a + m(k_a + k_r(1 + v_a) + k_{vs}(v_a + v_r - v_a v_r)), \\
b_1 &= d_r k_a + k_r d_a + k_{vs}(d_r v_a + d_a v_r), \\
b_0 &= k_a k_r + k_{vs}(k_r v_a + k_a v_r).
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Das charakteristische Polynom ist erwartungsgemäß vierter Ordnung. In dem System sind zwar, nach der Betrachtung des Aktors als eine virtuelle Feder, drei Energiespeicher gemäß Bild 6.4(b) vorhanden, die Vorspannschleife mit der Steifigkeit k_{vs} stellt aber keinen unabhängigen Energiespeicher dar. Gemäß Abschnitt 5.4.4 kann sie mit der Steifigkeit k_r in Reihe geschaltet und als ein einziger Energiespeicher mit der resultierenden Steifigkeit k_v betrachtet werden. Aus diesem Grund und der Übersichtlichkeit halber wird die Steifigkeit k_{vs} zu Null gesetzt. Die Reglerparametrisierung wird davon nicht beeinflusst. Zum Zweck der Ermittlung der Reglerkoeffizienten wird das System noch weiter reduziert, in dem ebenfalls die Anordnung des Aktors und des CFK-Rohres als eine Reihenschaltung von zwei Federn betrachtet wird. Ein so reduziertes System kann durch eine homogene Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$\ddot{x} + \frac{d_f}{m}\dot{x} + \frac{k_f}{m}x = 0 \tag{6.14}$$

beschrieben werden, welche der Gleichung (2.70) entspricht. Dabei gelten folgende Beziehungen

$$k_f = \frac{k_r k_a}{k_r + k_a}, \tag{6.15}$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{k_f}{m}}, \tag{6.16}$$

$$\delta_f = \frac{d_f}{2m}, \tag{6.17}$$

$$D_f = \frac{d_f}{2\sqrt{k_f m}}, \tag{6.18}$$

wobei k_f die Steifigkeit, d_f den Dämpfungsfaktor, ω_f die Kreisfrequenz, δ_f die Abklingkonstante und D_f den Dämpfungsgrad des reduzierten Modells bezeichnen [126]. Zusätzlich wird angenommen, dass die Dämpfung des CFK-Rohres mit

$$d_r \approx 0 \quad (6.19)$$

vernachlässigbar ist. Die Ermittlung der Reglerkoeffizienten entspricht der Suche nach einer virtuellen Steifigkeit k_a und Dämpfung d_a des Aktors, welche die zeitoptimale Schwingungsunterdrückung des CFK-Rohres garantieren können. Die Suche beginnt mit der Bestimmung der virtuellen Steifigkeit k_a des Aktors. Sie muss so gewählt werden, dass die durch die Anregung f_x in das System gelieferte Energie nur eine solche Verformung des CFK-Rohres mit der Steifigkeit k_r verursacht, die seiner Verformung in einem statischen Zustand unter dieser Anregung entspricht. Bei der geltenden Annahme (6.19) und der Berücksichtigung der Beziehung (6.16) wird diese Verformung in der Zeit

$$t_{fmin} = \frac{t_r}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k_r}} \quad (6.20)$$

erreicht, wobei t_r die Zeit der Periodendauer der ungedämpften Schwingung des CFK-Rohres bezeichnet. In dieser Zeit t_{fmin} muss der Rest der Energie, die durch das CFK-Rohr im statischen Zustand nicht gespeichert wird, durch den Aktor übernommen werden. Sonst wird diese überflüssige Energie auf dem CFK-Rohr ohne Dämpfung zu seiner Dauerschwingung führen. Die von dem Aktor übernommene Energie muss dann so abgebaut werden, dass dabei keine Schwingungen in dem dämpfungslosen CFK-Rohr angeregt werden. Das System erreicht seine Ruhelage ohne Überschwingungen am schnellsten im aperiodischen Fall. Deswegen wird gemäß der Analyse in Abschnitt 2.5 ein aperiodischer Verlauf des Energieabbaus im Aktor und dadurch auch im reduzierten System verlangt, was mit der Bedingung

$$D_f = 1 \quad (6.21)$$

ausgedrückt wird. Die homogene Gleichung (6.14) hat in diesem Fall ein Paar reeller Eigenwerte, eine Doppelwurzel. Der Aktor muss die überflüssige Energie in der Zeit t_{fmin} übernehmen, was auf folgende Weise

$$s_1 = s_2 = -\frac{1}{t_{fmin}} = -\delta_f \quad (6.22)$$

formuliert wird. Um nun die virtuelle Steifigkeit des Aktors k_a in der Abhängigkeit von der Steifigkeit des CFK-Rohres k_r auszudrücken, werden die Gleichungen (6.22) und (6.17)

zusammengeführt und der Dämpfungsfaktor

$$d_f = \frac{2m}{t_{fmin}} \quad (6.23)$$

ermittelt. Dieser Faktor kann ebenso auf eine andere Weise aus der Verbindung der Bedingung (6.21) mit der Beziehung (6.18) errechnet werden

$$d_f = 2\sqrt{k_fm}. \quad (6.24)$$

Die rechten Seiten der Formel (6.23) und (6.24) werden verglichen, wobei die Zeit t_{fmin} durch den Ausdruck (6.20) und die Steifigkeit k_f durch die Formel (6.15) substituiert werden. Die Auflösung der so gebildeten Gleichung nach k_a führt zu folgender Formel für die virtuelle Steifigkeit des Aktors bzw. des Reglers

$$k_a = \frac{4k_r}{\pi^2 - 4} = \beta_r k_r, \quad (6.25)$$

wobei β_r den Proportionalitätsfaktor der beiden Steifigkeiten darstellt. Die aufgenommene Energie soll dann aperiodisch abgebaut werden, was durch die Gleichung

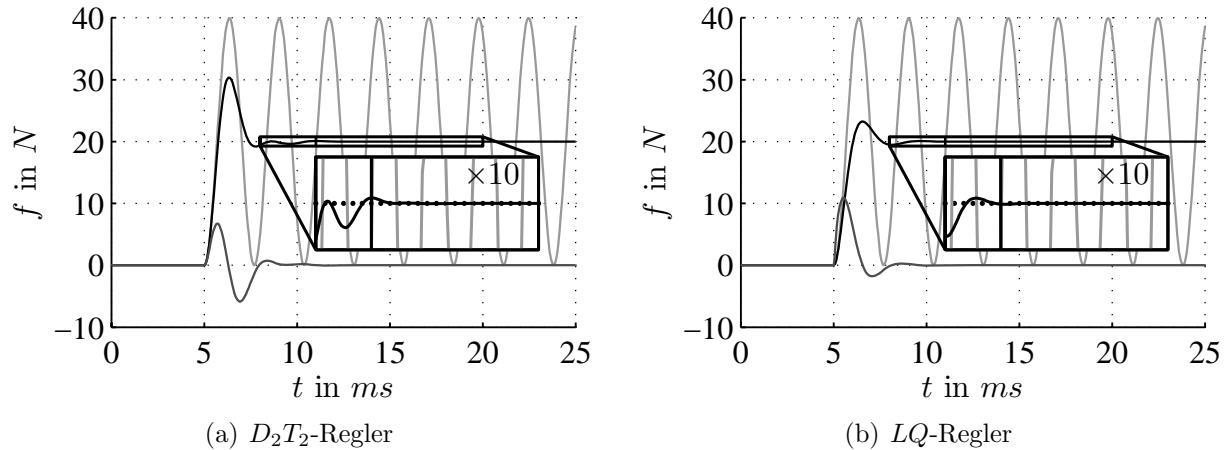
$$d_a = 2\sqrt{k_a m} \quad (6.26)$$

ausgedrückt wird. Da die Berechnungen für ein reduziertes Modell (6.14) durchgeführt wurden, wird das Verhalten des originalen Systems (6.12) von dem aperiodischen Charakter abweichen.

Die Eigenschaften der so entwickelten Regelung wurden für den geschlossenen Regelkreis (6.12) in der Simulation untersucht. Es wurden folgende Annahmen bezüglich der Systemparameter getroffen:

$$\begin{aligned} d_r &= 0,0, & k_r &= 5,464 \cdot 10^6 \text{ N/m}, & k_{vs} &= 0,0, \\ m &= 1,0 \text{ kg}, & g &= 0,0 \text{ m/s}^2, & v_r &= 1,0, & v_a &= 1,0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Die Reglerkoeffizienten wurden aus den Formeln (6.25) und (6.26) berechnet. In Bild 6.5(a) ist die Antwort des Systems (6.12) auf die sprunghafte Kraftänderung $f = -20 \text{ N}$ dargestellt. Die Antwort des Systems ist dabei durch die Kraft am Sensor f_s ausgedrückt. Das Systemverhalten ohne Regelung wurde in hellgrau und des geregelten Systems in schwarz vorgestellt. In dunkelgrau wurde zusätzlich die Stellgröße des Aktors angegeben. Zum Vergleich ist in Bild 6.5(b) eine Simulation des Systems (6.5) mit einem LQ -Regler dargestellt, der ein optimaler

Bild 6.5: Effizienz der Regelung: D_2T_2 kontra LQR

Regler bezüglich eines angegebenen Gütekriteriums ist. Um den Abklingvorgang genauer zu analysieren, wurde ein Wertbereich von $20,0 \pm 0,75 \text{ N}$ zehnfach vergrößert, wobei das Zeitintervall 12 ms betrug. Die simulativen Ergebnisse und besonders die Analyse der Stellwerte der beiden Regler, die in ihrem zeitlichen Ablauf vergleichbar sind, bestätigen die bei der Dimensionierung des D_2T_2 -Reglers vorgeschlagene Vorgehensweise. Der Stellwert des LQ -Reglers war zwar in seiner Amplitude größer und die Regelzeit kürzer aber immer noch mit der Regelzeit der neuen D_2T_2 -Regelung vergleichbar. Von Vorteil war die symmetrische Antwort des neuen Reglers, was auf eine gute Ausnutzung seines Aktorstellbereiches hinweist. Die Amplitude des D_2T_2 -Reglers kann dabei durch die Einstellung der Verstärkung v_a an das System angepasst werden, was aber vorerst nicht untersucht wurde, da die Platzierung der Pole des Reglers (6.9) und ihre Untersuchung in Vordergrund stand. Die Einbuße in der Regelzeit des D_2T_2 -Reglers gegenüber dem LQ -Regler wurde durch die effiziente Berechnung der Reglerparameter im Vergleich zur Lösung der algebraischen *Matrix-Riccati-Gleichung* kompensiert, was letztendlich das entscheidende Kriterium bei der Wahl des Regelungsverfahrens sein kann.

Stabilität der Regelung

Die Stabilität des geschlossenen Regelkreises (6.12) zusammen mit den vorgeschlagenen Reglerparametern (6.25) und (6.26) wird mit Hilfe des *Hurwitz-Kriteriums* untersucht [78, 98, 126]. Dieses algebraische Kriterium für lineare Systeme ermöglicht die Bestimmung der Parameterdefinitionsbereiche, für welche das System asymptotisch stabil ist. Im Fall der Instabilität kann aber die Anzahl der Pole in der rechten Halbebene nicht bestimmt werden. Die

Koeffizienten des charakteristischen Polynoms lauten:

$$\begin{aligned}
 b_4 &= m^2(1 + v_a - v_a v_r), \\
 b_3 &= m(2\sqrt{mk_r} + d_r(1 + v_a)), \\
 b_2 &= 2d_r\sqrt{mk_r} + mk_r(1 + \beta_r + v_a), \\
 b_1 &= k_r(d_r\beta_r + 2\sqrt{mk_r}), \\
 b_0 &= \beta_r k_r.
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Als hinreichende Bedingung müssen alle Koeffizienten existieren und positiv sein. Zusätzlich ist eine *Hurwitz-Matrix* zu stellen, deren Hauptdeterminante sowie auch alle „nordwestlichen“ Unterdeterminanten positiv definit sein müssen. Da die meisten Reglerkoeffizienten in diesem Verfahren bereits in der Abhängigkeit von den Parametern der Strecke formuliert wurden, begrenzt sich die Ermittlung der Stabilitätsbedingungen auf die Bestimmung der Bedingungen für die Verstärkung des Reglers v_a .

Die Parameter des zu regelnden Systems können abhängig von der Konfiguration und den gemachten Annahmen unterschiedliche Werte annehmen. Diese Situation führt dazu, dass schon für das einfache Singlemode-Modell keine allgemeine Aussage bezüglich der Stabilität des Regelkreises gemacht werden kann. Aus diesem Grund wurde mit Hilfe von Mathematica[®] nur die Stabilität der Regelung für den Parametersatz (6.27), der die Grundlage der im vorhergehenden Abschnitt durchgeführten simulativen Untersuchung darstellte, geprüft:

$$\begin{aligned}
 (m > 0 \quad \wedge \quad k_r > 0 \quad \wedge \quad d_r = 0 \quad \wedge \quad k_{vs} = 0 \quad \wedge \\
 \beta_r = 0,682 \quad \wedge \quad 0 < v_r \leq 1) \quad \implies \quad \boxed{v_a > 0}
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Die Stabilitätsuntersuchungen liefern die Bedingungen für die Reglerverstärkung v_a in Abhängigkeit von den Werten der Systemparameter. Eine optimale Verstärkung v_a des Reglers muss noch ermittelt werden. Sie kann experimentell bestimmt werden, wobei eine effiziente Hilfe bei dieser Suche die *Bode*- oder *Nyquist*-Diagramme leisten können [78, 79, 98, 115]. Der Einfluss der zusätzlichen Phasenverschiebung auf die Stabilität der Regelung wurde nur simulativ untersucht, da sich die Arbeit an diesem Konzept überwiegend auf die Suche nach einer einfachen Reglerstruktur und eine effiziente Berechnung der Reglerparameter konzentrierte. Auf Grund dieser Untersuchungen wurde festgestellt, dass mit steigender Phasenverschiebung die Wirksamkeit der Regelung erwartungsgemäß sinkt, bis eine Instabilität des Systems auftritt ($\varphi > 47,6^\circ$ bezogen auf die Eigenfrequenz des Reglers). Indirekt geht daraus ein Beweis für die Robustheit der Regelung gegen Parameterunsicherheiten hervor, da die ungenaue Kenntnis der Systemparameter auch eine Phasenverschiebung des Reglersignals den geregelten Moden gegenüber zur Folge hat [126].

6.4.2 Posenabhängige Anpassung der Reglerparameter

Der neue Regler wurde anhand der mechanischen Parameter des linearen Systems, der Steifigkeit k_r und der effektiv schwingenden Masse m , ausgelegt. Die Steifigkeit und die effektiv schwingende Masse eines Manipulators ändern sich aber gemäß Abschnitt 4.7 in Abhängigkeit von seiner Pose. Um die Regler an die sich ändernde Roboterstruktur anzupassen, ist die Kenntnis des Robotermodells erforderlich. Zu diesem Zweck wird die Dynamikgleichung des Manipulators in den kartesischen Koordinaten aus Abschnitt 4.6 verwendet. Sie nimmt hier die Form

$$\underline{\underline{M_x}} \ddot{x} + (\underline{\underline{C_x}} + \underline{\underline{D_x}}) \dot{x} + \underline{\underline{K_x}} x = f_x \quad (6.30)$$

an. Die Form der Gleichung ähnelt der Systemgleichung (6.5), welche die Grundlage für den Reglerentwurf darstellte. Bei Annahme vernachlässigbarer Dämpfung sind die $\underline{\underline{K_x}}$ Steifigkeits- und $\underline{\underline{M_x}}$ Trägheitsmatrix gemäß den Gleichungen (2.30) und (2.31) ausreichend, um die Eigenfrequenzen des Systems zu bestimmen. Wenn aber das System eine hohe Dämpfung $\underline{\underline{D_x}}$ aufweist, muss sie bei der Analyse gemäß (2.76) berücksichtigt werden. In dem Fall, dass sich die Schwingungsquellen nur in den einzelnen Elementen der Roboterstruktur befinden, an welche ebenfalls die adaptronischen Aktoren und Sensoren angeschlossen sind, ist die Adaptation der Reglerkoeffizienten im Prinzip nicht erforderlich, da so ein Element als lineares System behandelt und geregelt werden kann [50, 126, 139, 140, 145]. In so einem System können aber mehrere solche elastischen geregelten Elemente auftreten, die sich dann gegenseitig Konfigurationsabhängig beeinflussen, so dass diese Art der Regelung keine konstante Regelgüte garantieren kann. Für die weiteren Herleitungen wird angenommen, dass die Schwingungsquellen in der gesamten Roboterstruktur verteilt sind und die Dämpfung vernachlässigbar ist.

Um nun die Parameter des D_2T_2 -Reglers zu berechnen, muss gemäß Abschnitt 6.4.1 die Steifigkeit und die effektiv in der Richtung des Aktors schwingende Masse ermittelt werden. Diese Problematik wurde bereits in Abschnitt 4.7 ausführlich behandelt. Es wurden Formeln angegeben, welche die Berechnung der Steifigkeit gemäß Gleichung (4.65)

$$k_{xy}^{DIR} = \sqrt{\underline{\underline{x_{xy}}}^T \underline{\underline{N_x}}^T \underline{\underline{N_x}} \underline{\underline{x_{xy}}}}^{-1}, \quad (6.31)$$

wobei $\underline{\underline{N_x}} = \underline{\underline{K_x}}^{-1}$ und der effektiv schwingenden Masse gemäß (4.70)

$$m_{xy}^{DIR} = \lambda \cdot \sqrt{\underline{\underline{x_{xy}}}^T \underline{\underline{M_x}}^T \underline{\underline{M_x}} \underline{\underline{x_{xy}}}} \quad (6.32)$$

in der Richtung \underline{x}_{xy} ermöglichen. Die Länge des Vektors muss dabei gleich eins $\|\underline{x}_{xy}\| = 1$ sein. Das Verfahren zur Anpassung der Reglerkoeffizienten an die Roboterstruktur wird somit durch die vier Gleichungen (6.25), (6.26), (6.31) und (6.32) beschrieben. Wie bereits erwähnt, sind die Werte k_{xy}^{DIR} und m_{xy}^{DIR} für die nichtsingulären Konfigurationen des Manipulators gemäß den Abschnitten 3.4.1 und 4.7 reell und positiv. Dadurch sind die Bedingungen (6.29) bezüglich der Steifigkeit und der Masse erfüllt. Die Stabilität der Regelung ist ebenfalls durch die Stetigkeit der Parameteränderung nach den Formeln (6.31) und (6.32) gewährleistet. Sie ergibt sich aus der Tatsache, dass die beiden Matrizen \underline{K}_x und \underline{M}_x von den kartesischen bzw. Gelenkkoordinaten abhängig sind. Diese Koordinaten bilden einen stetigen Konfigurationsraum, da für sie immer die erste und zweite Ableitung (Geschwindigkeit und Beschleunigung) angegeben werden kann. Folglich weist auch die Änderung der Reglerparameter einen stetigen/glatte Charakter gemäß den Ausführungen in Abschnitt 6.2 auf. Die Steifigkeits- und Trägheitsmatrizen müssen dabei experimentell ermittelt werden. Jede Schwingungsmoden wird dabei durch seine eigene Steifigkeitsmatrix beschrieben. Abhängig von der Repräsentation des Robotermodells kann das auch für die Trägheitsmatrix gelten. Eine solche Vorgehensweise führt zu einer modalen Darstellung des Robotermodells mit modalen Steifigkeiten und Massen für jede einzelne Schwingungsmoden [42].

6.4.3 Simulative Untersuchung der neuen Regelung

Die Untersuchungen der entwickelten Regelung wurden simulativ auf der Basis des ebenen elastischen parallelen Manipulators FÜNFGELENK durchgeführt. Die Dynamikgleichungen des Manipulators wurden gemäß den Angaben und Modellen aus Abschnitt 4.7 aufgestellt. Die konzentrierten Steifigkeiten befanden sich nur in den oberen aktiven Armen des Roboters. Die Eigenschwingungen der CFK-Rohre waren nur gering $d_{14} = d_{24} = 10$ und die der Piezosensoren mit $d_{12} = d_{22} = 818,94$ gut gedämpft. Eine lange Trajektorie zwischen den Punkten p^A und p^E , gezeigt in Bild 6.6(a), soll dabei ein Überprüfen der Regelung in verschiedenen Punkten des Arbeitsraumes ermöglichen. Der Beschleunigungsverlauf der Trajektorie wurde sprungförmig gewählt, um die elastischen Moden stark anzuregen. Es wurde eine maximale Beschleunigung von 100 m/s^2 und eine maximale Geschwindigkeit von 5 m/s eingestellt.

Die Organisation der Regelung ist schematisch in Bild 6.6(b) dargestellt. Die genutzten Symbole entsprechen den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.7. Die Antriebsmomente τ_{11} und τ_{21} für das elastische Modell wurden aus dem Starrkörpermodell berechnet und es fand keine Starrkörperregelung statt. Die Gründe dafür wurden bereits in Abschnitt 6.2 erklärt. Die Strukturregelung benutzte die an den Sensoren gemessene Kräfte f_{12} und f_{22} . Als Antwort

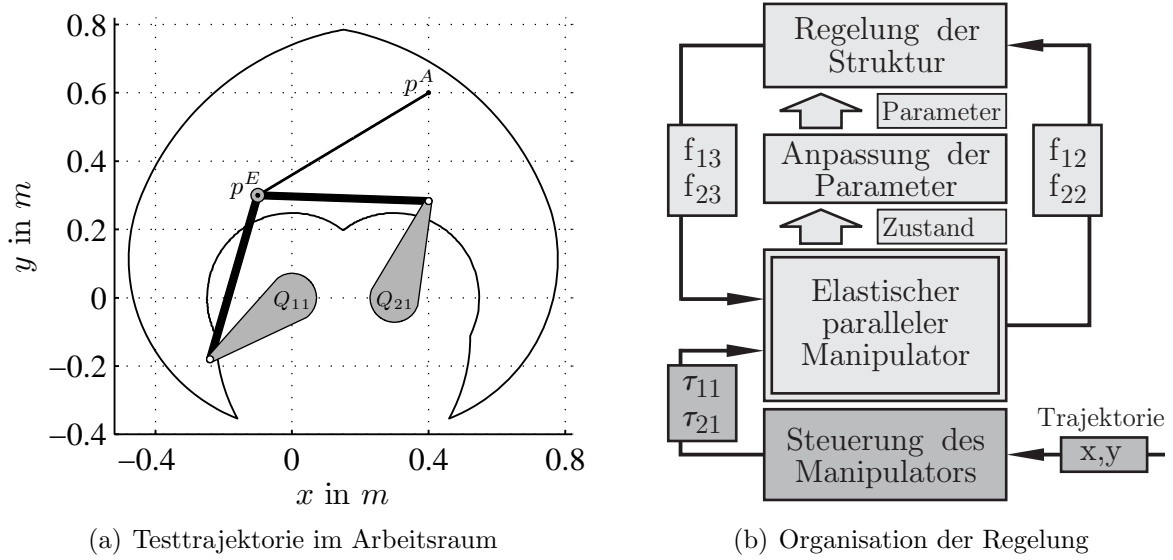


Bild 6.6: Testtrajektorie und Organisation der Regelung

erzeugte sie mit den Aktoren die Kräfte f_{13} und f_{23} . Eine Deformationskompensation am Modell wurde durchgeführt, so dass das Modell zu Beginn der Simulation keinen zusätzlichen Störeinflüssen ausgesetzt war [42]. Nur eine Schwingungsmoden des jeweiligen CFK-Rohres wurde berücksichtigt. Dementsprechend wurde nur ein D_2T_2 -Regler pro Arm eingesetzt. Diese Regler wurden gemäß den Formeln (6.25), (6.26), (6.31) und (6.32) an das System angepasst [125]. Die Berücksichtigung mehrerer Moden stellt dabei kein Problem dar, da die einzelnen Regler für die jeweiligen Moden getrennt entworfen und mit den anderen Reglern für denselben Aktor zu einem gemeinsamen Regler superponiert werden können. Die Strukturregelung war während der ganzen Simulation aktiv.

In Bild 6.7 sind die Kräfte f_{12} und f_{22} an den Sensoren während der Fahrt der vorgegebenen Trajektorie in hellgrau ohne und in schwarz mit Strukturregelung dargestellt. Die Schwingungen der elastischen Moden wurden durch eine sprungförmige Änderung der Beschleunigungen und damit der Antriebsmomente angeregt. Ohne Regelung sind sie stark ausgeprägt. Das Einsetzen der Regelung unterdrückt die Schwingungen effizient, sowohl während der gesamten Roboterfahrt als auch am Ende der Trajektorie. Der Verlauf des Regelungsvorgangs ist für die ganze Trajektorie vergleichbar. In dieser Hinsicht ist die Regelgüte beinahe konstant. Eine Abweichung von der konstanten Regelgüte kann vor allem auf die, bei der Reglerdimensionierung unberücksichtigte, Dämpfung der CFK-Rohre und den störenden Einfluss der Schwingungen der gut aber nicht optimal gedämpften Sensorsteifigkeiten zurückgeführt werden. Die Regeldauer ist dagegen von den Eigenfrequenzen der geregelten Moden und der Pose des Manipulators abhängig. Das ist nicht zu vermeiden, da die Regelung anhand der posenabhängigen Zeitkonstanten des Systems dimensioniert wird. Einen besseren Einblick

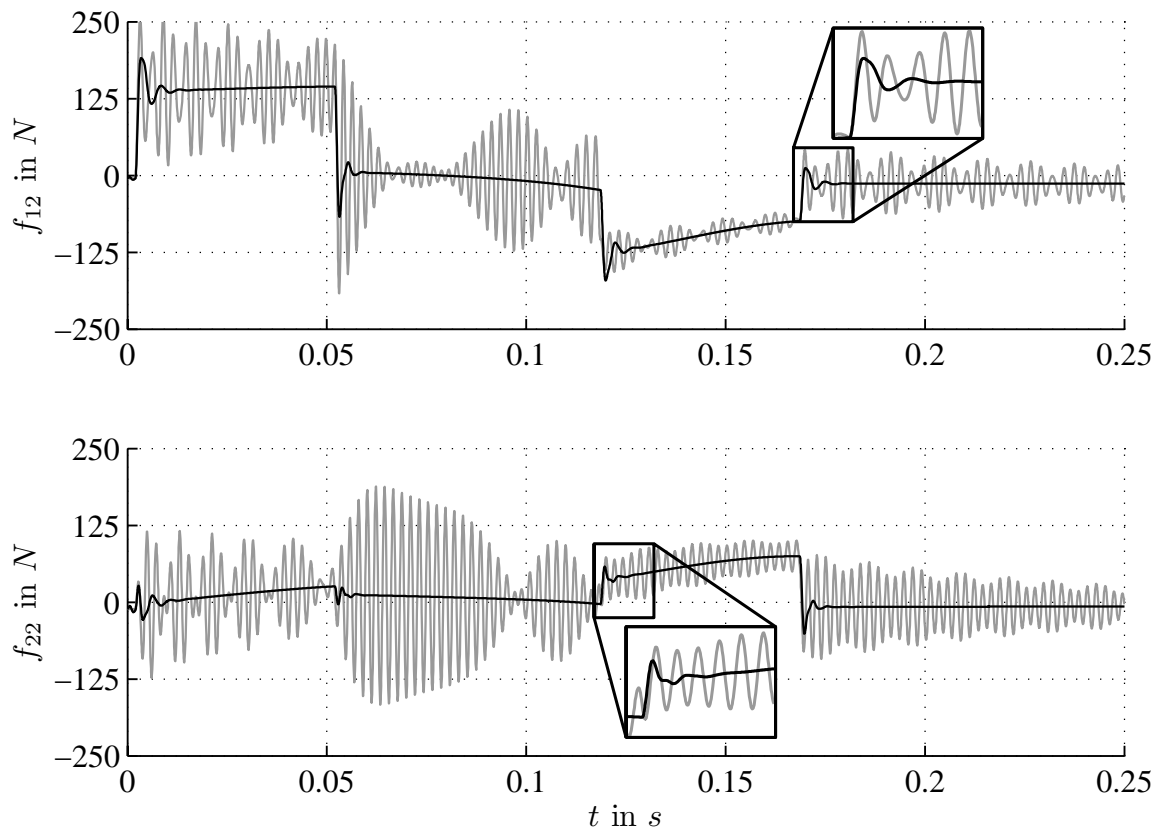


Bild 6.7: Schwingungsunterdrückung am parallelen Manipulator FÜNFGELENK

in den Regelvorgang an zwei unterschiedlichen Stellen der Trajektorie bieten die in Bild 6.7 dargestellten Vergrößerungen an. Die Vergrößerung beträgt das 1,5-fache des Wertes und 2,5-fache der Zeit. Der Regelungsablauf ist, wie erwähnt, in den beiden Fällen vergleichbar, was die Erfüllung der an die Regelung gestellten Anforderungen und die angewandte Vorgehensweise bestätigt.

6.5 Untersuchungen an der Roboterstruktur

Es wurden Untersuchungen an der Roboterstruktur durchgeführt, um das entworfene Regelungskonzept auf der Basis eines realen Systems zu überprüfen. Auf Grund des Umfangs der Arbeit wurden die Experimente nur auf einer statischen Roboterstruktur durchgeführt. Die Einstellung der Antriebswinkel betrug dabei $Q_{11} = 135^\circ$ und $Q_{21} = 45^\circ$. Das System wurde in dieser Pose identifiziert. Basierend auf den Ergebnissen der Identifikation wurde die Möglichkeit der angesprochenen Superponierung mehrerer D_2T_2 -Regler simulativ untersucht. Anschließend wurde die Regelung unter dem QNX-System implementiert und mit Nutzung

der Piezosensoren und des Beschleunigungssensors überprüft.

6.5.1 Identifikation der Roboterstruktur

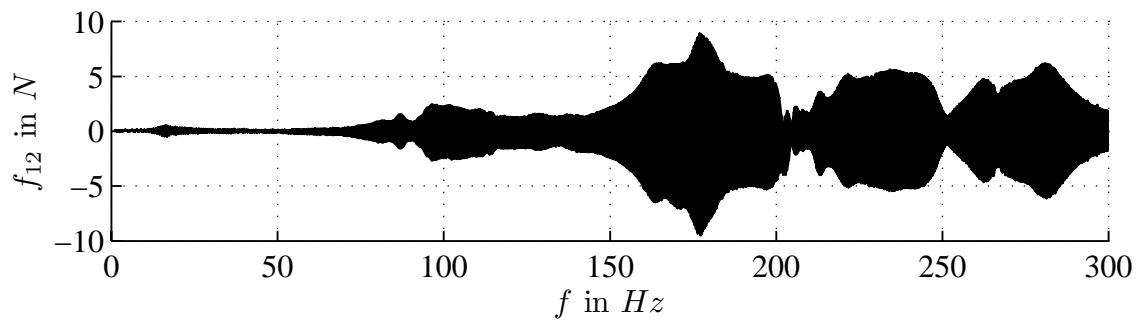
Das entworfene Regelungskonzept setzt gemäß Abschnitt 6.4.1 die Kenntnis der Steifigkeiten und der effektiv schwingenden Massen der Roboterstruktur in Richtung der Aktoren voraus. Das Ziel der Identifikation ist nun die Bestimmung dieser Parameter [1, 21]. Zu diesem Zweck werden die Piezoaktoren und Piezosensoren des Manipulators FÜNFGELENK genutzt. Diese Wahl hat den Vorteil, dass die Piezosensoren bereits in die Arme des Manipulators integriert wurden, wodurch die Kräfte und damit die Schwingungen in Richtung der Aktoren direkt gemessen werden können. Anhand dieser Signale können die gesuchten Steifigkeiten und Massen geschätzt werden. Die Messung wird dabei so organisiert, dass sie immer mit einem gegenüberliegenden Aktor-Sensor-Paar durchgeführt wird, z.B. der Aktor des ersten Armes wird angeregt und der Sensor des zweiten Armes misst das Signal. Als Anregung wurde ein Gleitsinus (engl. sweep sinus) gewählt. Dieses Signal hat gewisse Vorteile gegenüber den standardmäßig zur Identifikation benutzten Signalen, wie z.B. dem Sprungsignal, dem Impuls, dem weißen Rauschen oder einem PRBS-Signal (engl. pseudo-random binary sequence) [76, 131]. Alle Eigenfrequenzen in dem gewählten Bereich werden gleichermaßen stark angeregt und im Vergleich zu den oben genannten Signalen ist das Signal-Rausch-Verhältnis am günstigsten [90]. Der Gleitsinus stellt dabei ein sinusartiges Signal dar, deren Frequenz sich bei einer konstanten Amplitude mit der Zeit meistens linear ändert. Die Frequenz des Signals gleitet in einem gewählten Frequenzbereich. Die Bandbreite des Gleitsinus ist, wie die Bandbreite der digitalen Steuergeräte, begrenzt, was diese Art der Anregung zum Einsatz in digitalen Systemen prädestiniert. Einziges Problem bei einem Einsatz dieses Signals ist die Wahl der Signaldauer zwischen der beiden Grenzfrequenzen. Diese Zeit muss experimentell für jedes System ermittelt werden, in dem der Gleitsinus mit einer steigenden und sinkenden Flanke angegeben wird. Die gewählte Signaldauer ist richtig, wenn sich für die beiden Flanken dieselben Eigenfrequenzen ergeben. Bei der Identifikation selbst ist es schon ausreichend den Gleitsinus mit nur einer der Flanken einzusetzen.

Die Messungen wurden für beide Führungsketten des Manipulators FÜNFGELENK durchgeführt. Die Bearbeitung der Messungen und die Identifikation wurde unter Matlab® mit den dort zur Verfügung stehenden Funktionen realisiert [150]. Die angewandte Vorgehensweise wird hier genauer am Beispiel der linken Führungskette beschrieben. In Bild 6.8(a) ist die am linken Piezosensor gemessene Systemantwort bei einer Anregung mit dem rechten Piezoaktor dargestellt. An dieser Stelle kann ein weiterer Vorteil des Gleitsinus genannt werden. Die Visualisierung der Systemantwort in Abhängigkeit der Frequenz ermöglicht es,

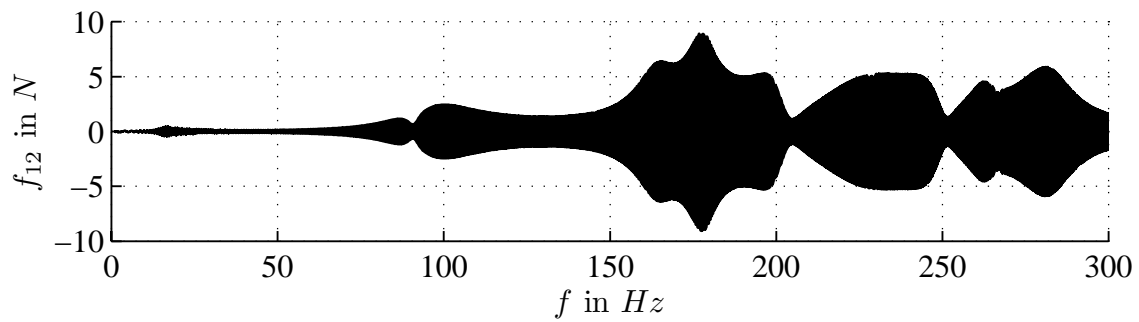
die gut ausgeprägten Eigenfrequenzen sofort zu erkennen, was später mit den Ergebnissen der Identifikation verglichen werden kann. Diese Systemantwort zusammen mit der Anregung des rechten Aktors wurde mit dem *Box-Jenkins Model* unter Matlab® analysiert. Es wurden verschiedene Polynomansätze für die Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion mit steigender Ordnung ausprobiert und die Antwort des geschätzten Modells mit der gemessenen Antwort verglichen. Eine gute Übereinstimmung wurde bei einem charakteristischen Polynom der 44ten-Ordnung und einem Zähler der 34ten-Ordnung erreicht. Die Übertragungsfunktion des Fehlers wurde dabei durch ein PT_2 -Glied beschrieben. Die Antwort des geschätzten Modells auf einen Gleitsinus ist in Bild 6.8(b) in schwarz und das dazugehörige Amplitudenspektrum in Bild 6.8(c) in hellgrau zu sehen.

Die Analyse der Übertragungsfunktion ergab viele mehrfache Pole, was auf eine zusätzliche Phasenverschiebung pro Schwingungsmode hindeutet. Da der Regler aber in Abhängigkeit der mechanischen Parameter der Roboterstruktur parameterisiert wurde, musste dadurch die Frage der zusätzlichen Phasenverschiebung von der Reglerdimensionierung getrennt werden. Sie sollte anschließend separat gelöst werden. Aus diesem Grund war die Form dieses Modells zur Überprüfung des entwickelten Regleralgorithmus nicht geeignet, so dass ein vereinfachtes Ersatzmodell aufgestellt wurde. Zu diesem Zweck wurde ein Amplitudenspektrum der originalen Systemantwort mit Hilfe der FFT-Analyse, dargestellt in schwarz in Bild 6.8(c), berechnet. Basierend auf den Ergebnissen der durchgeführten Identifikation wurden aus dem Amplitudenspektrum zehn Eigenfrequenzen ausgewählt. Sie wurden aus dem gesamten Bereich unabhängig von der Dominanz der Mode gewählt, um möglichst viele unterschiedliche Moden bei den Untersuchungen zu berücksichtigen. Die Aufstellung dieses Modells wird im Folgenden noch genauer besprochen. Die Antwort des vereinfachten Ersatzmodells auf den Gleitsinus ist in Bild 6.8(d) in schwarz und ihr Amplitudenspektrum in Bild 6.8(c) in dunkelgrau dargestellt. Die beiden Arten der Antworten zeigen, dass die gewählten Eigenfrequenzen im vereinfachten Ersatzmodell ausreichend gut abgebildet werden. In Tabelle 6.2 sind die gewählten Eigenfrequenzen zusammen mit den Werten der zugehörigen Phasenverschiebungen angegeben. Dabei ist nur die Phasenverschiebung des Anti-Aliasing-Filters φ_{AD} , in diesem Fall der *Bessel-Filter* der 5^{ter}-Ordnung gemäß Abschnitt 5.3, und die aus der Laufzeit der Kommunikation resultierende Phasenverschiebung φ_{FW} angegeben. Die Phasenverschiebung φ_{FW} wurde für das Kommunikationsintervall von $625 \mu s$ berechnet. Die gesamte Phasenverschiebung ist durch φ_{Σ} gekennzeichnet.

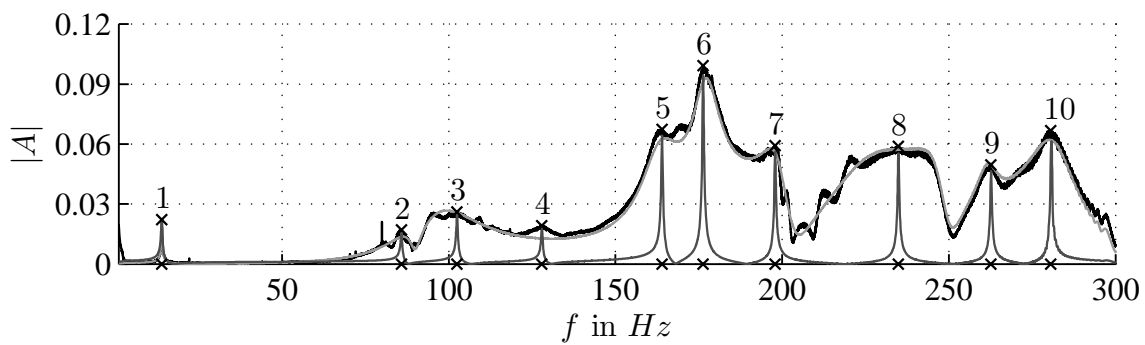
Anhand der gewählten Frequenzen müssen nun die Steifigkeiten und die effektiv schwingenden modalen Massen der Roboterstruktur ermittelt werden. Diese werden zur Aufstellung des vereinfachten Ersatzmodells und anschließend zur Parameterisierung der Regler benötigt. Zuerst werden die modalen Massen geschätzt [42]. Zu diesem Zweck wird sich die Beziehung zu



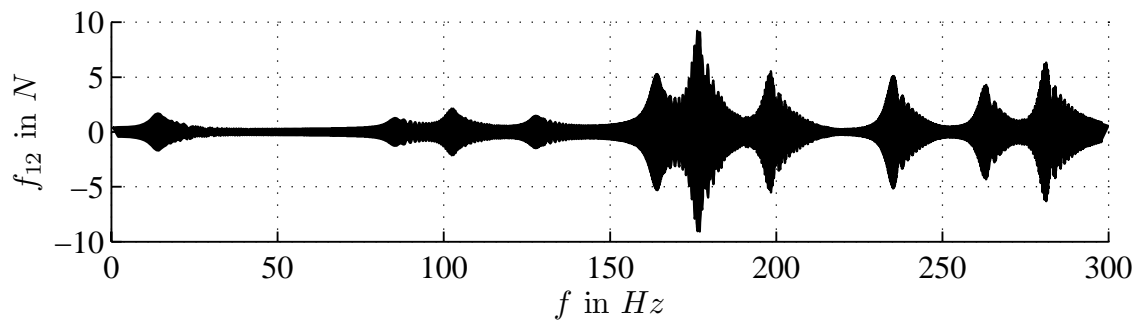
(a) Messung am linken Arm bei der Gleitsinus-Anregung des rechten Aktors



(b) Antwort des Box-Jenkins Modells auf die Gleitsinus-Anregung



(c) Amplitudenspektren der System- und Modellantworten



(d) Antwort des vereinfachten Ersatzmodells auf die Gleitsinus-Anregung

Bild 6.8: Identifikation der Roboterstruktur - FÜNFGELENK

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frequenz $f_i [Hz]$	14,0	85,8	102,5	127,9	164,0	176,3	197,9	234,8	262,6	280,6
Tiefpass $\varphi_{AD} [^\circ]$	8	22	26	31	38	40	45	52	58	61
Firewire $\varphi_{FW} [^\circ]$	3	19	23	29	36	40	45	53	59	63
Summe $\varphi_\Sigma [^\circ]$	11	41	49	60	74	80	90	105	117	124

Tabelle 6.2: Eigenfrequenzen des Modells und deren Phasenverschiebung

Nutze gemacht, welche die Eigenfrequenz einer Mode in Abhängigkeit ihrer effektiv schwingenden Masse gemäß Formel (6.16) ausdrückt. Der Einfluss der Laständerung Δm auf die Änderung der modalen Dämpfung gemäß den Formeln (6.17) bzw. (6.18) und dadurch auf die Frequenz der Eigenschwingung nach der Gleichung (2.76) wird in dieser konzeptuellen Analyse zunächst vernachlässigt. Da zur Bestimmung der effektiv schwingenden Masse m_e einer Mode eine Laständerung Δm nötig ist, müssen zwei Messungen, eine ohne und zweite mit einer Zusatzlast durchgeführt werden. Unter Berücksichtigung der Gleichung (6.16) kann die Masse m_e wie folgt

$$k_{m_e} = k_{m_e + \Delta m} \implies 4\pi^2 m_e f_{max}^2 = 4\pi^2 (m_e + \Delta m) f_{min}^2, \quad (6.33)$$

$$m_e = \Delta m \frac{f_{min}^2}{f_{max}^2 - f_{min}^2} \quad (6.34)$$

berechnet werden, wobei f_{max} und f_{min} die Eigenfrequenzen einer Mode ohne und mit Zusatzlast kennzeichnen. Die Steifigkeiten k_{m_e} und $k_{m_e + \Delta m}$ in Gleichung (6.33) bezeichnen dieselbe Steifigkeit, die nur von den mechanischen Eigenschaften der Roboterstruktur und eventuell der Pose des Manipulators, aber nicht von der Zusatzlast abhängig ist. Ein Problem bleibt bei der Wahl der Zusatzlast, denn wenn diese Last zu groß gewählt wird, werden manche der Moden so stark gedämpft, dass die dazugehörigen Eigenfrequenzen nicht mehr identifizierbar/detektierbar sind.

Um die vorgestellte Vorgehensweise bei der Ermittlung der effektiv schwingenden Masse m_e zu überprüfen, wurde eine Reihe von Messungen an der Roboterstruktur mit den unterschiedlichen Zusatzlasten durchgeführt. Dabei wurde nur die unterste Mode (14,0 Hz ohne Zusatzlast) analysiert. Das Amplitudenspektrum für den gewählten Bereich ist in Bild 6.9

dargestellt. Die Eigenfrequenz der Grundmode bei jeder Zusatzlast wurde aus dem jeweiligen Spektrum ermittelt. Die Ergebnisse der Messungen und der Berechnungen gemäß Formel (6.34) wurden in Tabelle 6.3 gesammelt. Die Ergebnisse zeigen, dass sich die ermittelte moda-

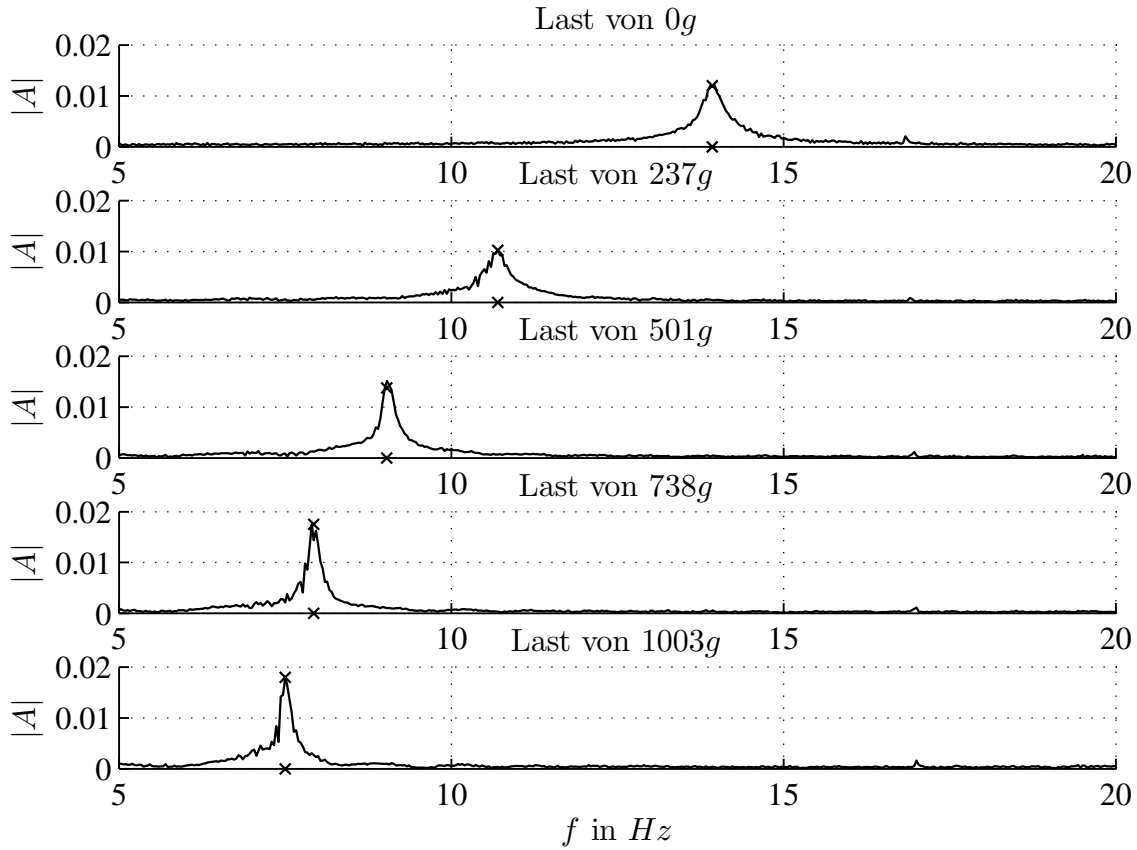


Bild 6.9: Verschiebung der Eigenfrequenz bei Laständerung - FFT Analyse

le Eigenmasse der Grundmode m_{e1} mit der Änderung der Zusatzlast zwar ändert, die Werte aber in einem relativ kleinen Bereich bleiben. Die Differenzen können hier vor allem auf die unberücksichtigte Dämpfung zurückgeführt werden. Durch die Erhöhung der Zusatzlast sinkt nämlich nicht nur die Frequenz der Oszillation sondern auch der dazugehörige Dämpfungsgrad gemäß Gleichung (6.18). Um den Fehler der Schätzung zu minimieren, muss die Dämpfung der Mode in die Berechnungen künftig mit einbezogen werden. Die vorgeschlagene Vorgehensweise wurde aber trotz dieser Fehler anhand der gewonnenen Ergebnisse bestätigt. Für die Zwecke der weiteren statischen Untersuchungen ist es in diesem Fall ausreichend, als Schätzung für die effektiv schwingende Masse der Grundmode, einen Medianwert aus den ermittelten Massen anzunehmen. Somit beträgt sie $m_{e1} = 364,97 \text{ g}$. Eine weitere Vereinfachung wird getroffen, in dem die Masse m_{e1} zur Berechnung aller Steifigkeiten k_{ei} aus den identifizierten Eigenfrequenzen gemäß Formel (6.16) eingesetzt wird. Im statischen Fall führt das zu keinerlei Fehlern, da hierdurch keine Frequenzänderung entsteht. Der Dämpfungsgrad

Zusatzlast Δm [g]	Frequenz f [Hz]	Differenz Δf [Hz]	Effektive Masse m_e [g]
0	13,97	0,00	—
237	10,74	3,24	341,88
501	9,10	4,87	369,58
738	8,00	5,97	360,36
1003	7,60	6,37	421,92

Tabelle 6.3: Bestimmung der effektiv schwingenden Masse für die Grundmode

der jeweiligen Mode D_{ei} wurde dabei niedriger als die des Original-Systems eingestellt, um die Effizienz der Regelung zu überprüfen. Die Verstärkung der jeweiligen Mode v_{ei} im vereinfachten Ersatzmodell wurde aus den im Amplitudenspektrum ermittelten Werten berechnet. Die Übertragungsfunktion einer Mode wird somit wie folgt

$$G_{ei}(s) = \frac{v_{ei}}{\frac{m_{e1}}{k_{ei}}s^2 + 2D_{ei}\sqrt{\frac{m_{e1}}{k_{ei}}}s + 1} \quad (6.35)$$

geschrieben. Das vereinfachte Ersatzmodell wird durch die parallele Schaltung der n - PT_2 -Glieder der n -Moden ($n = 10$, gemäß der Tabelle 6.2) gebildet, was in Bild 6.10 gezeigt ist. Die Antwort des vereinfachten Ersatzmodells auf den Gleitsinus wurde bereits in Bild 6.8(d) in schwarz und ihr Amplitudenspektrum in Bild 6.8(c) in dunkelgrau dargestellt. Sie bestätigt, wie erwähnt, dass die gewählten Eigenfrequenzen durch das Modell ausreichend gut abgebildet sind. Die Diskrepanz zum komplexen Modell und dem realen System resultiert dabei sowohl aus der Senkung der Dämpfung der Moden als auch aus der erwähnten Vernachlässigung der mehrfachen Pole.

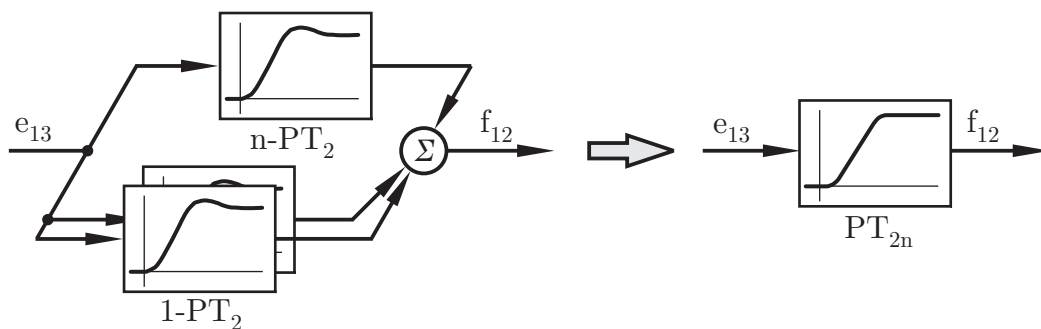


Bild 6.10: Vereinfachtes Ersatzmodell der linken Führungskette

6.5.2 Schwingungsunterdrückung

Die in den Abschnitten 6.4.1 und 6.4.3 durchgeführten simulativen Untersuchungen gingen von einem einfachen Singlemode-Modell aus. In diesem Abschnitt wird die vorgeschlagene Regelung zusammen mit dem in Abschnitt 6.5.1 identifizierten Modell untersucht. Anschließend wird die Regelung ebenfalls in Verbindung mit dem realen System überprüft.

Simulative Ergebnisse

Bevor die Regelung auf der Roboterstruktur getestet wird, wird eine simulative Untersuchung durchgeführt, um die Eigenschaften der neuen Regelung zu überprüfen. Dabei handelt es sich um die Untersuchung

- der Superposition von mehreren modalen Reglern,
- der kompakten Einstellung der Verstärkungen der modalen Regler und
- des Einflusses der Phasenkompensation auf die Regelung.

Bei den ersten zwei Punkten werden sowohl das vereinfachte Ersatzmodell der linken Führungskette des Manipulators als auch die Regelung im Frequenzbereich dargestellt. Um den Einfluss der Phasenkompensation zu untersuchen, wird die Regelung im zeitdiskreten Bereich implementiert. Der kompakte D_2T_2 -Regler wird, ähnlich wie das vereinfachte Ersatzmodell, als parallele Schaltung von n Reglern der n Moden organisiert. Eine solche Konfiguration des n -modalen Reglers ermöglicht die Eliminierung des Übertragungseffektes (engl. spill-over), da die einzelnen modalen Regler nur für eine bestimmte Eigenfrequenz „zuständig“ sind, wodurch die Anregung der hohen nicht modellierten Moden durch den kompakten Regler vermieden werden kann [90]. Die Architektur des kompakten Reglers im Frequenzbereich ist in Bild 6.11 dargestellt. Die Übertragungsfunktion der einzelnen D_2T_2 -Regler gemäß

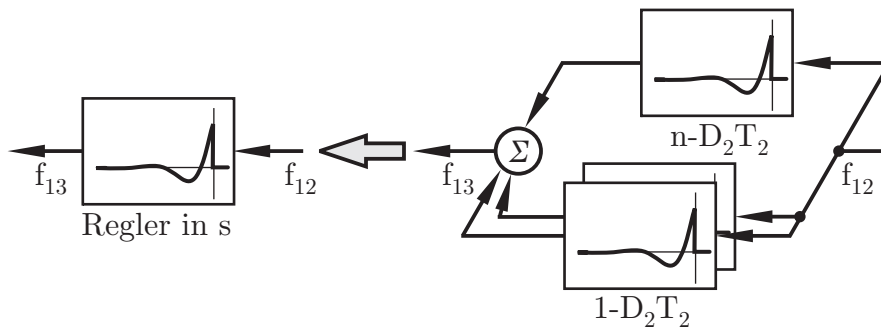


Bild 6.11: Organisation des kompakten modalen Reglers im s-Bereich

Gleichung (6.9) nimmt dabei die Form

$$G_{ai}(s) = \frac{\mathcal{L}\{\ddot{x}_{ai}\}}{\mathcal{L}\{f_s\}} = \frac{v_{ai}s^2}{m_{e1}s^2 + d_{ai}s + k_{ai}} \quad (6.36)$$

an, wobei v_{ai} die Verstärkung, k_{ai} die virtuelle Steifigkeit gemäß Formel (6.25) und d_{ai} den virtuellen Dämpfungsfaktor gemäß Gleichung (6.26) der jeweiligen Mode bezeichnen. Die Verstärkungen der modalen Regler $\underline{v}_a = [v_{a1} \dots v_{ai} \dots v_{an}]$ wurden in Abhängigkeit der Verstärkungen der jeweiligen Moden des vereinfachten Ersatzmodells $\underline{v}_e = [v_{e1} \dots v_{ei} \dots v_{en}]$ aus der Formel

$$\underline{v}_a = v_{reg} \cdot \frac{\sqrt{\underline{v}_e}}{\max(\sqrt{\underline{v}_e})} \quad (6.37)$$

berechnet, wobei v_{reg} den zu bestimmenden gemeinsamen Verstärkungsfaktor aller Moden des Reglers beschreibt. Die Formel (6.37) wurde in Experimenten ermittelt und entstand aus der Überlegung, dass die Verstärkungen der jeweiligen modalen Regler so berechnet werden müssen, dass eine kompakte Anpassung der Regler an die sich ändernde nichtlineare Strecke ermöglicht wird. Die Nachjustierung der einzelnen modalen Regler im Betrieb wäre sehr kompliziert und für den praktischen Einsatz beim parallelen Manipulator ungeeignet. Die Or-

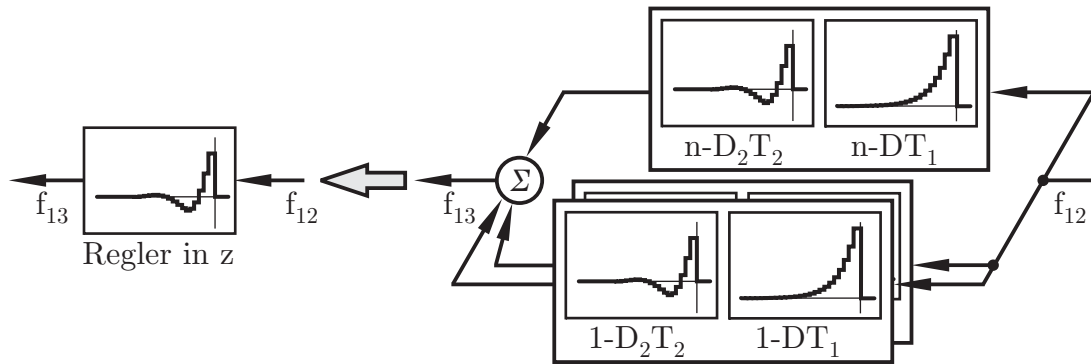


Bild 6.12: Organisation des kompakten modalen Reglers im z-Bereich

ganisation des kompakten D_2T_2 -Reglers im zeitdiskreten Bereich ist in Bild 6.12 dargestellt. Der digitale Regler wurde mit Hilfe der bilinearen Transformation aus dem kontinuierlichen Regler berechnet [115]. Er wurde um die Phasenkompensation ergänzt, da in einem realen System eine zusätzliche Phasenverschiebung vorhanden ist. Sie ergibt sich aus der Existenz der mehrfachen Pole, die bei dem Reglerentwurf in dieser Konzeptionsphase auf Grund der gewählten Vorgehensweise zuerst nicht berücksichtigt wurden und aus den durch die digitale Signalverarbeitung verursachten Laufzeiten. Diese Phasenverschiebung führt zur Senkung

der Regelgüte bis zur Instabilität der Regelung, gemäß den Untersuchungen zur Stabilität in Abschnitt 6.4.1. Zum Zweck simulativer Untersuchungen im zeitdiskreten Bereich wurde die Phasenverschiebung im Regelkreis mit einem PT_1 -Glieder nachgebildet (mit der Eckkreisfrequenz $\omega_{PT_1} = 1243,45 \text{ rad/s}$), dessen Phasendrehung für die jeweilige Schwingungsmoden der Strecke mit dem Wert φ_{AD} aus Tabelle 6.2 vergleichbar ist. Die Kompensation der Phasenverschiebung und auch der Amplitudendämpfung wird dabei mit Hilfe eines DT_1 -Glieder realisiert [115]. Das DT_1 -Glieder weist in seinem Phasengang eine positive Phasenverschiebung auf, welche die Anhebung des Phasengangs in dem Bereich von 0° bis 90° theoretisch ermöglicht [79]. Diese Lösung hat aber in der praktischen Ausführung gewisse Nachteile. Die Amplitude der ersten Halbperiode bei einem sich ändernden sinusförmigen Signal wird mit nur ca. 70% seines Originalwertes abgebildet. Da sich die Schwingung in ihrer Amplitude ständig ändert, wird die Amplitude des Signals immer zwischen seinem realen Wert und der angesprochenen prozentualen Senkung schwanken. Ein ähnliches Problem betrifft die Kompensation der Phase, die bei einem sich ändernden Signal und einem kausalen System immer eine gewisse Einstellzeit erfordert. Da in der vorgeschlagenen Regelung der Regler schon in der ersten ein Viertelperiode die überflüssige Energie aus dem schwingungsfähigen System entziehen soll, können die genannten Nachteile die Regelgüte deutlich reduzieren. Um aber die Stabilität des zeitdiskreten Regelkreises zu gewährleisten und anschließend die Experimente durchführen zu können, mussten diese Nachteile akzeptiert werden, da die Untersuchungen oder Entwicklungen anderer Methoden zur Phasenkompensation bzw. Phasenregelung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

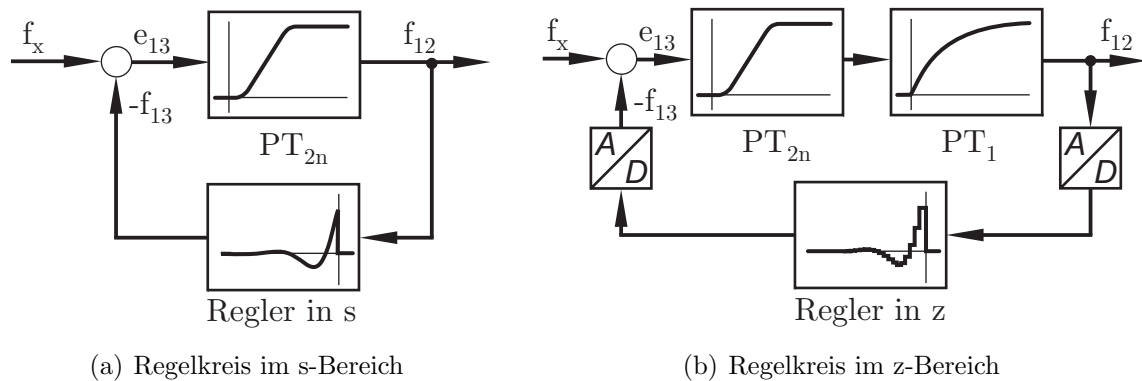


Bild 6.13: Regelkreis im kontinuierlichen und zeitdiskreten Bereich

Die Organisation der Regelkreise im kontinuierlichen und zeitdiskreten Bereich ist in den Bildern 6.13(a) und 6.13(b) entsprechend dargestellt. Das System wird durch einen Kraftsprung von $f_x = 10 \text{ N}$ angeregt. Im ersten Versuch für den Regelkreis im s -Bereich wird die Zusammenarbeit der überlagerten Regler analysiert und experimentell nach einer passenden Verstärkung v_{reg} gesucht. In Bild 6.14(a) ist die Antwort des vereinfachten Ersatzmodells mit

Regelung in schwarz, ohne Regelung in hellgrau und zusätzlich der Stellwert des Reglers in dunkelgrau dargestellt. Es wurde dabei für die Verstärkung ein Wert von $v_{reg} = 7$ eingestellt, bei dem die Antwort des geregelten Systems höherer Ordnung vergleichbar in seiner Form mit der Antwort des Singlemode-Modells aus Abschnitt 6.4.1 war. Die Regelung unterdrückt effizient alle zehn Eigenfrequenzen, was die Vorgehensweise bei der Wahl der Verstärkung, die Superponierung von mehreren modalen Reglern und die Erfüllung der an die Regelung gestellten Anforderungen bestätigt. Im zweiten Versuch wird der digitale Regler zusammen mit dem Kompensator untersucht. In Bild 6.14(b) ist die Antwort des geregelten Systems

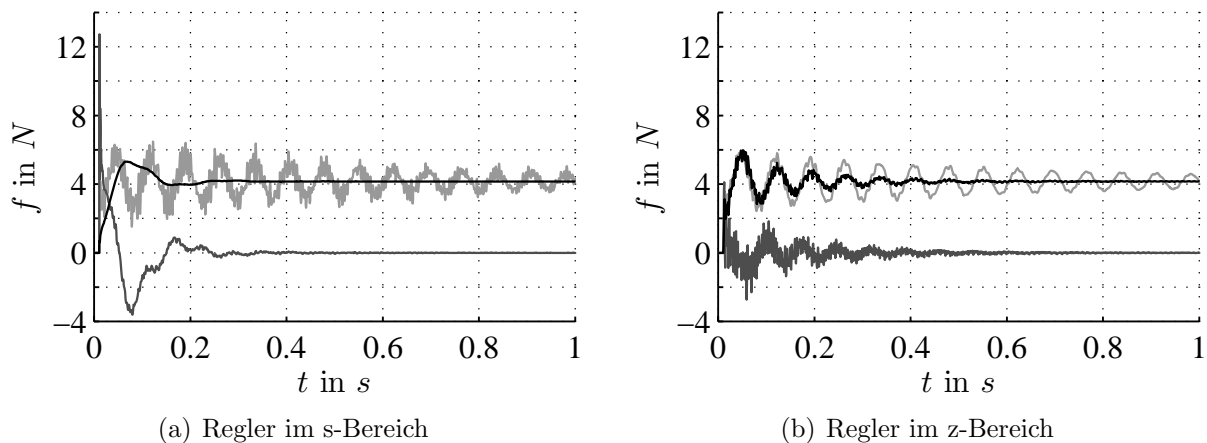


Bild 6.14: Regelung im kontinuierlichen und zeitdiskreten Bereich

in schwarz, des unregulierten Systems in hellgrau und der Stellwert des digitalen Reglers in dunkelgrau dargestellt. Die dämpfende Wirkung der Regelung ist deutlich zu sehen. Die Regelgüte ist aber gesunken. Verantwortlich dafür war die Senkung der Reglerverstärkung v_{reg} um den Faktor sechs, um die Stabilität der Regelung zu sichern. Die Senkung der Verstärkung v_{reg} wurde durch die beschriebenen Nachteile des DT_1 -Gliedes erzwungen. Die Phase konnte nämlich nicht in jedem Zeitpunkt durch den Kompensator genau kompensiert werden, so dass das System bei der Überschreitung einer bestimmten Phasenverschiebung und der damit verbundenen kritischen Verstärkung instabil war [98, 115]. Die gewonnenen Ergebnisse bestätigen jedoch eine begrenzte Einsatzmöglichkeit dieser Lösung zur Phasenkompensation, was eine Grundbasis für die Implementierung dieser Regelung auf dem Versuchsträger FÜNFGELENK schafft.

Experimentelle Ergebnisse

Der digitale Regler mit dem Kompensator wird zur Strukturregelung des elastischen parallelen Manipulators FÜNFGELENK eingesetzt [5, 65]. Die Anordnung der Komponenten des Sys-

tems und die schematische Bauweise der Roboterstruktur kann Bild 5.1 entnommen werden. Die Untersuchungen werden, wie bereits erwähnt, nur in der statischen Pose durchgeführt. Die Anregung des Systems wird durch eine sprunghafte Kraftänderung am Endeffektor erzeugt. Zu diesem Zweck wird eine Last von $m_L = 2\text{ kg}$ am Endeffektor befestigt, die der maximalen zulässigen Last für diesen Manipulator entspricht. Ein Freigeben der Last erzeugt einen Kraftsprung. Die Last wurde dabei um $6,5\text{ cm}$ senkrecht in der z -Richtung zu der xy -Arbeitsebene verschoben, was den normalen Arbeitsbedingungen entspricht, wodurch die Roboterstruktur in allen drei xyz -Hauptrichtungen angeregt wird. Diese Art der Anregung tritt z.B. beim Absetzen einer Last oder am Ende einer „unstetigen“ Trajektorie auf. Eine Voruntersuchung zeigte dabei, dass bei dieser Art der Anregung die unterste Mode der Schwingung die Antwort der Roboterstruktur determiniert, da die höheren Moden sehr gut gedämpft sind. Aus diesem Grund wird nur ein digitaler Regler pro Arm, ähnlich wie bei der Simulation im Abschnitt 6.4.3, eingesetzt. Die Eigenfrequenzen der Grundmoden betragen $f_{1L} = 14,0\text{ Hz}$ für die linke und $f_{1R} = 13,8\text{ Hz}$ für die rechte Führungskette. Die Verstärkung der beiden Regler wurde experimentell eingestellt, wobei eine möglichst kurze Ausregelzeit angestrebt wurde.

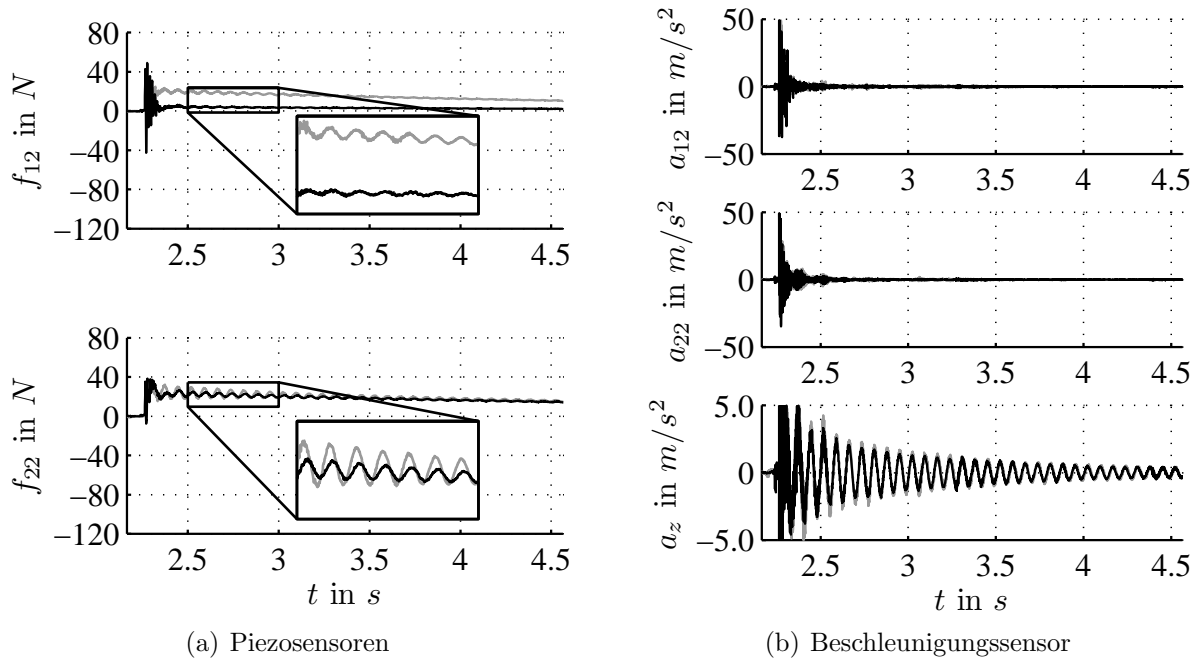


Bild 6.15: Regelung mit dem Piezosensor-Piezoaktor-Paar

Der erste Versuch wird mit Nutzung des Piezosensor-Piezoaktor-Paares des jeweiligen aktiven Armes durchgeführt. In Bild 6.15(a) ist die Messung mit den Piezosensoren der beiden Führungsketten und in Bild 6.15(b) die Messungen mit allen drei xyz -Achsen des Beschleunigungssensors dargestellt. Die Antwort des geregelten Systems ist in schwarz und die des

ungeregelten Systems in hellgrau angegeben. Die Beschleunigungen der xy -Achsen wurden dabei in die Richtungen des linken a_{12} und des rechten a_{22} Armes transformiert. Die getrennte Betrachtung aller drei Schwingungskomponenten am Beschleunigungssensor zeigt, dass die hochfrequenten Schwingungen in der xy -Arbeitsebene schon ohne Regelung sehr gut gedämpft sind. Die unterste dominante Mode kann hier als parasitäre Schwingung der Roboterstruktur aus der Arbeitsebene heraus in z -Richtung betrachtet werden, wofür die verminderte Steifigkeit der passiven Gelenke und der Versatz zwischen den beiden Führungsketten verantwortlich gemacht werden kann. Die durch die beiden Piezosensoren gemessenen Schwingungen können dabei als eine Projektion der drei Komponenten der Schwingung, die von dem Beschleunigungssensor separat gemessen wurden, auf die Führungsketten des Manipulators aufgefasst werden. Die zu kompensierende Phasenverschiebung ergibt sich in dem System aus der Phasenverschiebung des Anti-Aliasing-Filters und der doppelten Laufzeit der Kommunikation gemäß Tabelle 6.2. Die doppelte Laufzeit der Kommunikation folgt aus der Organisation der in Abschnitt 5.2 beschriebenen Kommunikationsarchitektur und konnte in dieser Systemkonfiguration nicht modifiziert werden. Dadurch war die gesamte Phasenverschiebung deutlich höher im Vergleich zu den Untersuchungen des vorherigen Abschnittes. Das führte zu einer weiteren Senkung der Regelgüte. Abgesehen von der verminderten Regelgüte zeigen die Messungen, dass in den aktiven Armen des Roboters eine sichtbare Dämpfung erreicht werden konnte, so wurden $9,5\text{ dB}$ für den linken und $7,2\text{ dB}$ für den rechten Arm, für den Endeffektor in z -Richtung jedoch nur $2,0\text{ dB}$ erzielt.

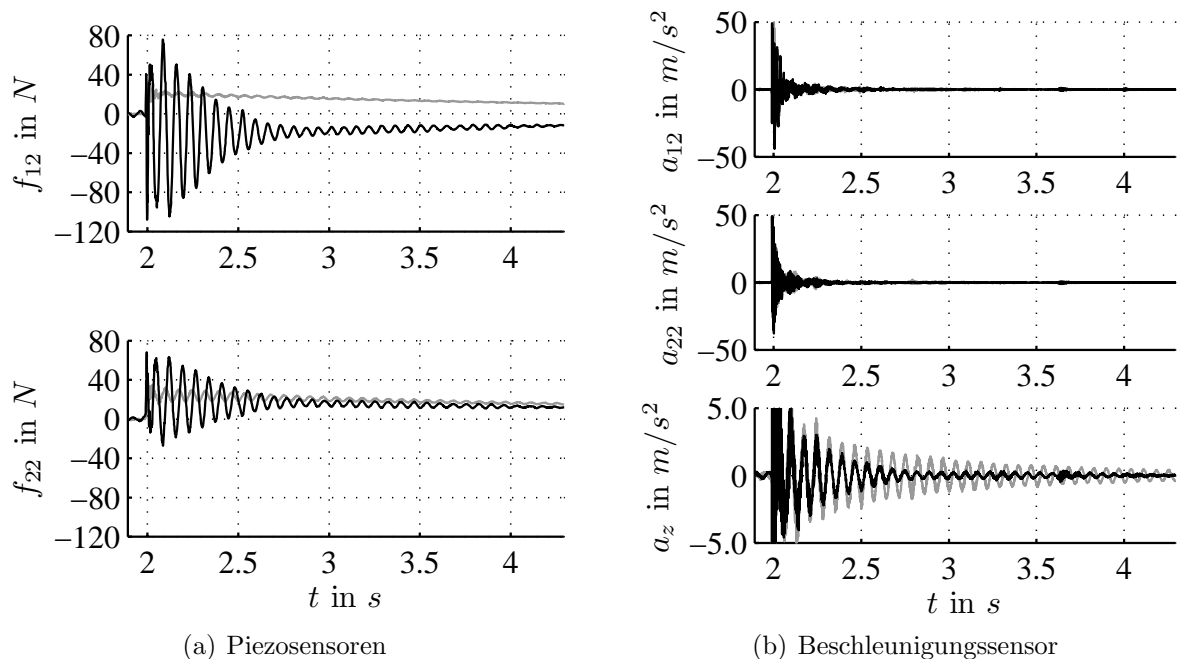


Bild 6.16: Regelung mit dem Beschleunigungssensor-Piezoaktor-Paar

Im zweiten Versuch wurde als Eingangssignal für die beiden digitalen Regler die z -Komponente der Beschleunigung vom Beschleunigungssensor verwendet. Die digitalen Regler wurden an die Roboterstruktur angepasst und ihre Verstärkung um das 40fache im Vergleich zum ersten Versuch erhöht. Die Ergebnisse sind in den Bildern 6.16(a) für die Piezosensoren und 6.16(b) für den Beschleunigungssensor dargestellt. Die Erhöhung der Verstärkung ist deutlich bei den Signalen der Piezosensoren sichtbar. Das Signal ist am linken Piezosensor 26 dB und am rechten Piezosensor $10,3\text{ dB}$ stärker. Die höheren durch die Aktoren erzeugten Kräfte führen zu einer besseren Unterdrückung der z -Komponente der Schwingung am Endeffektor, was das eigentliche Ziel der Regelung ist. Die Dämpfung ist gestiegen und betrug $7,3\text{ dB}$, was ebenfalls zu erkennen ist.

Abgesehen von der verminderten Regelgüte zeigen diese Ergebnisse, dass die Kollokation des Sensor-Aktor-Paares eine effiziente Dämpfung der Schwingungen am Endeffektor auch verhindern kann. Diese Art der Sensor-Aktor-Platzierung ist für Systeme geeignet, bei denen sich die einzigen Quellen der Schwingungen in den geregelten Elementen befinden. Sonst wird mit Hilfe einer solchen Regelung nur das Element selbst und nicht die ganze Struktur „versteift“. Ein anderes Problem bei einer solchen Konfiguration ist die Detektion der Schwingungen, bei einem starken durch den Aktor erzeugten Signal, wie das im zweiten Versuch der Fall war. Diese Beobachtungen führen zu dem Schluss, dass die Sensor-Aktor-Platzierung nicht nur auf Grund der Analyse jedes einzelnen Elementes, sondern auf Grund der komplexen Analyse der ganzen Roboterstruktur erfolgen muss. Die Problematik der Phase zeigt hier, dass bei einem modellbasierten Regelungsverfahren, das nicht auf einem abstrakten, sondern einem „mechanischen“ nichtlinearen Modell des Manipulators basiert, der Kompensation bzw. der Regelung der Phasenverschiebung besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden soll. Die Entwicklung der Strukturregelung in der hier vorgeschlagenen Richtung bedarf zuerst einer Untersuchung und anschließend einer Implementierung effizienter Verfahren zur Phasenkompensation bzw. Phasenregelung.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden neue Konzepte für elastische parallele Manipulatoren zur Regelung von Strukturschwingungen entwickelt und untersucht. Im Vordergrund stand dabei die Minimierung der Zykluszeiten und die Gewährleistung einer konstanten Regelgüte über den gesamten Arbeitsraum des Manipulators. Da die parallelen Manipulatoren überwiegend zu der Familie der nichtlinearen Systeme gehören, setzte eine entsprechende Regelung Kenntnis der Modelle der Kinematik und der Dynamik voraus. Diese Zielsetzung bestimmte den Rahmen der Arbeit und zerlegte das Problem in

- die Modellierung eines elastischen parallelen Manipulators und
- den Entwurf einer modellbasierten Regelung.

Die in der Literatur zur Modellierung vorgestellten Methoden gingen von der Annahme einer starren Roboterstruktur aus. Die auf dieser Basis entwickelten Algorithmen und Methoden erforderten deswegen arbeitsaufwändige Modifikationen. Sonst führten sie zu komplexen Lösungen, die grundsätzlich für den Einsatz bei elastischen parallelen Manipulatoren nicht geeignet waren. Aus diesem Grund wurden für diesen Bereich neue Konzepte vorgeschlagen.

Zur Beschreibung der Kinematik wurde eine neue trigonometrische Methode entwickelt. Sie wurde auf dem Manipulator FÜNFGELENK erfolgreich eingesetzt. Diese Methode ermöglicht eine separate Berechnung der elastischen Deformationen und der globalen starren Bewegung der Roboterstruktur, was sich vorteilhaft auf die benötigte Rechenleistung auswirkt. Die Kinematikgleichungen wurden dabei in Abhängigkeit von den Winkeln der aktiven und passiven Gelenke formuliert. Dies hat den Vorteil, dass die unzulässigen Lösungen der Kinematik durch die Einführung der auf diese Winkel bezogenen Bedingungen eliminiert werden können. Zwei Methoden wurden entwickelt, um die Ermittlung dieser notwendigen Bedingungen für eine korrekten Definition des Arbeitsraumes zu unterstützen. Die korrekte Arbeitsraumbestimmung ist dabei für die Analyse der Robotereigenschaften sehr wichtig. Die Fehler in einer solcher Analyse können zur Ermittlung von falschen Kennwerten und folglich zu

einer Instabilität der darauf basierenden Regelung führen. Sie ist ebenfalls für die Sicherheit des Manipulators von großer Bedeutung. Die Kenntnis der geometrischen Begrenzungen des Manipulators ermöglicht die Implementierung einer hardwaremäßigen Überwachung des Arbeitsraumes, die von dem System unabhängig agieren und die Roboterstruktur vor der Zerstörung bei einem Systemabsturz schützen kann.

Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen eines elastischen parallelen Manipulators wurde durch die Entwicklung einer neuen Methode zur Herleitung der Jacobimatrix unterstützt. In den herkömmlichen Verfahren wurde diese Matrix hauptsächlich durch die Analyse der Kraftzerlegung in der Roboterstruktur hergeleitet, einer Analyse der Statik. Die neue Methode ermöglicht die Nutzung der Jacobimatrizen der seriellen kinematischen Ketten, die bereits zur Herleitung der Bewegungsgleichungen der seriellen Führungsketten aufgestellt wurden. Das reduziert den Arbeitsaufwand und eliminiert eine mühsame Analyse insbesondere bei Systemen höherer Ordnung, zu denen auch die elastischen parallelen Manipulatoren gezählt werden können. Eine höhere Ordnung stellt bei der Berechnung der direkten Dynamik ein ernstes Problem dar. Die direkte Dynamik wird z.B. bei der modellbasierten Regelung als Teil eines Beobachters zur Schätzung der nicht messbaren oder nicht gemessenen Zustände benutzt, um anschließend das Modell für den Regleralgorithmus berechnen zu können. Deswegen muss ihre Berechnung, genau wie die der Regelung, in Echtzeit durchgeführt werden. Eine höhere Ordnung des Modells kann dies jedoch verhindern. Aus diesem Grund wurde ein Verfahren zu einer Zerlegung dieser Gleichungen und einer separaten Berechnung der Teilgleichungen vorgeschlagen. Auf diese Weise konnte die Komplexität der Berechnungen deutlich gesenkt werden, so dass wiederum mehr Variablen bei der Modellierung berücksichtigt werden können. Bei dem neuen Verfahren bleibt jedoch die Frage nach der numerischen Stabilität im Langzeitbetrieb offen, was grundsätzlich ein gemeinsames Problem aller verteilten numerischen Berechnungen ist. Aus diesem Grund wurde dieses Problem hier nicht behandelt und soll ein Gegenstand künftiger Forschungsarbeiten sein.

Die aufgestellten Modelle und der Einsatz von neuartigen adaptronischen Komponenten in Form der in die Roboterstruktur integrierten Piezostapelaktoren ermöglichten die Entwicklung einer neuen, strukturorientierten, modellbasierten Regelungstrategie. Die entworfenen Regler bewirken ein federähnliches Verhalten der piezokeramischen Aktoren, das dem Verhalten des Systems ähnlich ist (strukturorientierte Regelung). Die Reglerkoeffizienten wurden in Abhängigkeit von den mechanischen Parametern des Manipulators, wie der Steifigkeit und der effektiv schwingenden Masse der Roboterstruktur, formuliert. Ein Verfahren zur Ermittlung dieser Koeffizienten, auf der Basis des Robotersmodells, wurde im Rahmen einer modellbasierten Regelung vorgeschlagen. Die einfache Form der auf diese Weise gewonnenen Gleichungen ermöglicht die Anpassung der Reglerkoeffizienten in Echtzeit, was für den

Einsatz dieses Verfahrens entscheidend sein kann. Die Untersuchungen der neuen Regelung bestätigten die vorgeschlagene Vorgehensweise. Sie zeigten, dass die neue Regelung über den gesamten Arbeitsraum des Manipulators eine beinahe konstante Regelgüte garantiert. Es wurde ebenfalls gezeigt, dass die einzelnen für die jeweiligen Moden entworfenen Regler zu einem kompakten Regler superponiert werden können. Auch die Untersuchungen im zeitdiskreten Bereich bestätigten diese Vorgehensweise. Sie zeigten jedoch, dass die Phasenverschiebung ein ernstes Problem bei der Implementierung dieses Regelverfahrens darstellt. Die zusätzliche durch das System bedingte Phasenverschiebung wurde zunächst in der Konzeptionsphase vernachlässigt, da nach einem Regler gesucht wurde, der in Abhängigkeit von den mechanischen Parametern der Roboterstruktur entworfen und dimensioniert werden kann. Die Problematik der Phasenverschiebung muss deswegen separat davon gelöst werden. Die hier für dieses Problem vorgeschlagene Lösung konnte die Phasenverschiebung zwar kompensieren, führte aber gleichzeitig zu einer Senkung der Regelgüte. Eine komplexe Behandlung dieser Problematik im Rahmen weiterer Arbeiten ist deswegen nötig, was hier auf Grund des Umfangs dieser Arbeit nicht möglich war.

Die vorgestellte Arbeit verschafft einen Überblick über verschiedene Bereiche paralleler Manipulatoren. Ausgehend von den Standardverfahren für sowohl serielle als auch parallele Starrkörperroboter wurden neue Konzepte für die elastischen parallelen Manipulatoren vorgeschlagen. Diese neuen Ansätze haben die gestellten Probleme gelöst, jedoch gleichzeitig auch neue Probleme offenbart. Aus diesem Grund bildet diese Arbeit eine gute Basis, nicht nur um den Bereich der elastischen parallelen Manipulatoren näher kennenzulernen, sondern auch die vorgestellten Konzepte zu erproben und weiter zu entwickeln.

Literatur

- [1] ABDELLATIF, H. ; KOTLARSKI, J. ; HEIMANN, B.: Dynamics identification of parallel manipulators. In: SCHUETZ, D. (Hrsg.) ; RAATZ, A. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 3rd International Colloquium of the Collaborative Research Center SFB 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Braunschweig, Germany : Fortschritte in der Robotik Band 14, Shaker Verlag, 28- 29 April 2008, S. 37 – 52
- [2] ALGERMISSEN, S. ; KEIMER, R. ; ROSE, M. ; BREITBACH, E. ; MONNER, H. P.: Applied robust control for vibration suppression in parallel robots. In: *Proc. of 22nd International Symposium on Automation and Robotics in Construction (ISARC)*. Ferrara, Italy, 2005
- [3] ALGERMISSEN, S. ; ROSE, M. ; KEIMER, R.: Angewandte Robuste Regelung zur Schwingungsunterdrückung am Parallelroboter mit adaptronischen Komponenten. In: *In: Adaptronic Congress*. Hildesheim, Deutschland, 27 - 28 April 2004, S. 1–7
- [4] ALGERMISSEN, S. ; ROSE, M. ; KEIMER, R. ; BREITBACH, E.: High-speed parallel robots with integrated vibration-suppression for handling and assembly. In: *Proc. of the 11th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials*. San Diego, USA : SPIE, 2004, S. 1 – 10
- [5] ALGERMISSEN, S. ; ROSE, M. ; SINAPIUS, M. ; STACHERA, K.: Robust gain-scheduling control for parallel robots with smart-structure components. In: SCHUETZ, D. (Hrsg.) ; RAATZ, A. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 3rd International Colloquium of the Collaborative Research Center SFB 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Braunschweig, Germany : Fortschritte in der Robotik Band 14, Shaker Verlag, 28- 29 April 2008, S. 191 – 206
- [6] ASADA, H.: Dynamic analysis and design of robot manipulators using inertia ellipsoids. In: *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, März 1984, S. 94–102
- [7] ASADA, H. ; SLOTINE, J. J. E.: *Robot analysis and control*. John Wiley & Sons, Inc., 1986. – 266 S
- [8] BAUMGARTE, J.: Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics* 1 (1972), S. 1–36
- [9] BENEDICT, C. E. ; TESAR, D.: Model formulation of complex mechanisms with multiple inputs: Part I - Geometry. In: *Journal of Mechanical Design* 100 (1978), Oktober, S. 747 – 753
- [10] BENEDICT, C. E. ; TESAR, D.: Model formulation of complex mechanisms with multiple inputs: Part II - The dynamic model. In: *Journal of Mechanical Design* 100 (1978), Oktober, S. 755 – 761
- [11] BERES, W. ; SASIADEK, J. Z.: Finite element dynamic model of multilink flexible manipulators. In: *Applied Mathematics and Computer Science, Technical University Press Zielona Gora, Poland* 5 (1995), Nr. 2, S. 231 – 262
- [12] BEYER, R.: Dynamik der Mehrkurbelgetriebe. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 8(2) (1928), April, S. 122 – 133

- [13] BHATTI, M. A.: *Fundamental Finite Element Analysis and Applications with Mathematica and Matlab Computations*. John Wiley & Sons, Inc., 2005. – 700 S
- [14] BIER, C.C.: *Geometrische und physikalische Analyse von Singularitäten bei Parallelstrukturen*, Technische Universität Braunschweig, Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigungstechnik, Vulkan Verlag, Dissertation, 2006. – ISBN 978-3-8027-8690-7
- [15] BREITBACH, E. ; ALGERMISSEN, S. ; KEIMER, R. ; ROSE, M. ; STACHERA, K.: Adaptive Tools in Parallel Robotics. In: LAST, P. (Hrsg.) ; BUDDE, C. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 2nd International Colloquium of the Collaborative Research Centre 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Aachen : Shaker Verlag, 10 - 11 Mai 2005, S. 203 – 219
- [16] BREITBACH, E. ; ROSE, M. ; KEIMER, R. ; WIERACH, P.: Adaptronic vibration damping with functional piezoceramic actuators and sensors. In: KREFFT, M. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 1st International Colloquium of the Collaborative Research Centre 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Aachen : Shaker Verlag, 29 -30 Mai 2002, S. 65 – 81
- [17] BROGARDH, T. ; GU, C. Y.: Parallel robot development at ABB. In: KREFFT, M. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 1st International Colloquium of the Collaborative Research Centre 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Aachen : Shaker Verlag, 29 - 30 Mai 2002, S. 229 – 244
- [18] BROGARDH, T. ; HANSSEN, S. ; HOVLAND, G.: Application-oriented development of parallel kinematic manipulator with large workspace. In: LAST, P. (Hrsg.) ; BUDDE, C. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 2nd International Colloquium of the Collaborative Research Centre 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Aachen : Shaker Verlag, 10 - 11 Mai 2005, S. 153 – 170
- [19] BUDDE, C. ; KOLBUS, M. ; LAST, P. ; RAATZ, A. ; HESSELBACH, J. ; SCHUMACHER, W.: Optimized change of working and assembly mode of the SFB 562 TRIGLIDE-robot. In: SCHUETZ, D. (Hrsg.) ; RAATZ, A. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 3rd International Colloquium of the Collaborative Research Center SFB 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Braunschweig, Germany : Fortschritte in der Robotik Band 14, Shaker Verlag, 28- 29 April 2008, S. 221 – 236
- [20] BUDDE, C. ; LAST, P. ; HESSELBACH, J.: Workspace enlargement of a triglide robot by changing working and assembly mode. In: *Proc. of the IASTED International Conference Robotics and Applications, Cambridge, USA*, 31 Oktober - 2 November 2005, S. 244 – 248
- [21] CECCARELLI, M. ; CARBONE, G.: Numerical and experimental analysis of the stiffness performances of parallel manipulators. In: LAST, P. (Hrsg.) ; BUDDE, C. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 2nd International Colloquium of the Collaborative Research Centre 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Aachen : Shaker Verlag, 10 - 11 Mai 2005, S. 21 – 35
- [22] CHAKAROV, D.: Study of the passive compliance of parallel manipulators. In: *Pergamon: Mechanism and Machine Theory* 34 (1999), S. 373–389
- [23] CRAIG, J.J.: *Adaptive control of mechanical manipulators*. Boston, MA, USA : Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc, 1988. – 136 S. – ISBN 0-201-10490-3
- [24] CZICHOS, H. (Hrsg.): *HÜTTE, Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*. 29. Auflage. Springer-Verlag, 1989

- [25] DE LUCA, A. ; PANZIERI, S. ; ULIVI, G.: Stable inversion control for flexible link manipulators. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Leuven, Belgium : IEEE, Mai 1998, S. 799 – 805
- [26] FEATHERSTONE, R. ; ORIN, D.: Robot dynamics: equations and algorithms. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. San Francisco, USA : IEEE, April 2000, S. 826 – 834
- [27] FISCHER, U. ; STEPHAN, W.: *Mechanische Schwingungen*. Fachbuchverlag Leipzig - Köln, 1993
- [28] FRANKE, H.-J. ; WREGE, C. ; STECHERT, C. ; PAVLOVIC, N.: Knowledge based development environment. In: LAST, P. (Hrsg.) ; BUDDE, C. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 2nd International Colloquium of the Collaborative Research Centre 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Aachen : Shaker Verlag, 10 - 11 Mai 2005, S. 221 – 236
- [29] FRICKE, S.: Entwurf und Implementierung einer Arbeitsraumüberwachung für einen Parallelroboter / Technische Universität Braunschweig, Institut für Regelungstechnik, Diplomarbeit. 2004. – Forschungsbericht
- [30] GABBERT, U. ; KOEPPE, H. ; NESTOROVIC-TRAJKOV, T.: Entwurf intelligenter Strukturen unter Einbeziehung der Regelung. In: *Automatisierungstechnik, Oldenbourg Verlag* 50 (2002), September, S. 432 – 438
- [31] GABBERT, U. ; SCHULZ, I. ; WEBER, C.-T.: Actuator placement in smart structures by discrete-continuous optimization. In: *Symposium on Mechatronics and Smart materials, Conference on Mechanical Vibration and Noise*. Sacramento, CA, USA, 1997, S. 14 – 17
- [32] GEBLER, B.: *Modellbildung, Steuerung und Regelung für elastische Industrieroboter*, Fortschritt - Berichte VDI, Technische Universität München, Reihe 11(98), Dissertation, 1987
- [33] GEORGE, L. E. ; BOOK, W. J.: Inertial vibration damping control of a flexible base manipulator. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 8 (2003), Juni, Nr. 2, S. 268 – 271
- [34] GESAMTKATALOG: *Die ganze Welt der Nano- und Mikropositionierung, Tutorium: Nanopositionieren mit Piezos*. Physik Instrumente (PI) GmbH & Co. KG. 2005
- [35] GOLUB, G.H. ; LOAN, C.F. van: *Matrix Computations*. Johns Hopkins Press, North Oxford Academic Publishers Ltd, A division of Kogan Page, 1986. – 496 S. – ISBN 0-946536-05-8
- [36] GOSSELIN, C.: Stiffness mapping for parallel manipulators. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 6 (1990), Juni, Nr. 3, S. 377–382
- [37] GOSSELIN, C. M. ; SEFRIQUI, J.: Polynomial solution for the direct kinematic problem of planar three-degree-of-freedom parallel manipulators. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Pisa, Italy : IEEE, Mai 1991
- [38] GROELING, C.: Entwurf eines universellen Messsystems zur Strukturregelung von Parallelrobotern / Studienarbeit, TU Braunschweig, Institut für Regelungstechnik. 2004. – Forschungsbericht
- [39] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; WRIGGERS, P.: *Technische Mechanik* 4. 6. Auflage. Springer, 2007. – 482 S

- [40] HEIMANN, B. ; GERTH, W. ; POPP, K.: *Mechatronik. Komponenten-Methoden-Beispiele*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 2001. – 2. Auflage, XIII+381 S. ISBN 3-446-21689-8
- [41] HELM, M.: *Durchschlagende Mechanismen für Parallelroboter*, Technische Universität Braunschweig, Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigungstechnik, Vulkan Verlag, Dissertation, 2003. – ISBN 978-3-8027-8671-6
- [42] HERMLE, M.: *Hierarchische Regelung globaler Bewegungen elastischer Roboter*. Stuttgart, Fortschritt-Berichte VDI (ISBN 3-18-387408-3), Reihe 8(874), Dissertation, 2001. – Reihe 8, Nr. 874
- [43] HESSELBACH, J. ; BIER, C. ; PIETSCH, I. ; PLITEA, N. ; BÜTTGENBACH, S. ; WOGERSIEN, A. ; GÜTTLER, J.: Passive joint-sensor for parallel robots. In: *Mechatronics 15, S. 43 – 65, 2005* 15 (2005), S. 43 – 65
- [44] HESSELBACH, J. ; HELM, M. ; SOETEBIER, S. ; RATHMANN, S.: Singularity passing with parallel robots. In: *Proc. of the 6th International MTeM Conference : Modern Technologies in Manufacturing*. Cluj-Napoca, Romania, 2 - 4 Oktober 2003
- [45] HESSELBACH, J. ; KREFFT, M. ; BUDDE, C. ; PLITEA, N.: Kinematic and dynamic design of parallel robots. In: KREFFT, M. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 1st International Colloquium of the Collaborative Research Centre 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Aachen : Shaker Verlag, 29 - 30 Mai 2002, S. 31 – 46
- [46] HOFFMAN, K.: *Eine Einführung in die Technik des Messens mit Dehnungsmessstreifen*. Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Darmstadt, 1987
- [47] ISERMANN, R.: *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. Springer, 1 Auflage 1999, korrigierter Nachdruck, 2002. – 412 S
- [48] JARZĘBOWSKA, E. ; JARZĘBOWSKI, W.: *Mechanika Ogólna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2000. – 299 S
- [49] KANG, B. ; CHU, J. ; MILLS, J. K.: Design of high speed planar parallel manipulator and multiple simultaneous specification control. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Seul, Korea : IEEE, Mai 2001, S. 2723 – 2728
- [50] KANG, B. ; MILLS, J. K.: Dynamic modeling of structurally-flexible planar parallel manipulator. In: *Robotica* 20 (2002), S. 329–339
- [51] KEIMER, R. ; ROSE, M. ; ALGERMISSEN, S.: Parallelroboter mit adaptronischer Schwingungsunterdrückung am Beispiel der Versuchsstruktur FÜNFGELENK. In: *In: Adaptronic Congress*. Wolfsburg, Deutschland, 1 - 3 April 2003
- [52] KEIMER, R. ; SINAPIUS, M.: Adaptive components for parallel robots. In: SCHUETZ, D. (Hrsg.) ; RAATZ, A. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 3rd International Colloquium of the Collaborative Research Center SFB 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Braunschweig, Germany : Fortschritte in der Robotik Band 14, Shaker Verlag, 28- 29 April 2008, S. 181 – 190
- [53] KHALIL, W. ; GAUTIER, M.: Modelling of mechanical system with lumped elasticity. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. San Francisco, USA : IEEE, April 2000, S. 3965 – 3970

- [54] KIM, J. ; PARK, F. C. ; KIM, M.: Geometric design tools for stiffness and vibration analysis of robotic mechanisms. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. San Francisco, USA : IEEE, April 2000, S. 1942 – 1947
- [55] KLOTTER, K.: Die Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Achsialkraft bei beliebigen Randbedingungen. In: *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* 18 (1950), November, Nr. 6, S. 363–369
- [56] KOCK, S.: *Parallelroboter mit Antriebredundanz*. Duesseldorf - Braunschweig, Germany, Fortschritt - Berichte VDI (ISBN 3-18-389008-9), Technische Universität Braunschweig, Reihe 8(890), Dissertation, März 2001
- [57] KOCK, S. ; SCHUMACHER, W.: A parallel x-y manipulator with actuation redundancy for high-speed and active-stiffness applications. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Leuven, Belgium : IEEE, Mai 1998, S. 2295 – 2300
- [58] KOCK, S. ; SCHUMACHER, W.: A mixed elastic and rigid-body dynamic model of an actuation redundant parallel robot with high-reduction gears. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. San Francisco, USA : IEEE, April 2000
- [59] KOHN, N. ; KOLBUS, M. ; REISINGER, T. ; DIETHERS, K. ; STEINER, J. ; THOMAS, U.: PROSA - A generic control architecture for parallel robots. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Mechatronics and Robotics, Aachen, Germany, 2004*, S. 56 – 61
- [60] KOHN, N. ; STEINER, J.: Universal communication architecture for high-dynamic robot systems using QNX. In: *Proc. of International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV 2004)*. Kunming, China, 2004
- [61] KOHN, N. ; VARCHMIN, J.-U.: Kommunikation (IEEE-1394) und Middleware zur Steuerung hochdynamischer Prozesse. In: *Vortrag, SPS/IPC/DRIVES, Automatisierungstechnik Kongress, Nürnberg, 2003*, S. 321 – 331
- [62] KOHN, P.N.: *Kommunikations-Infrastruktur für hochdynamische Parallelroboter*, Technische Universität Braunschweig, Institut für Elektrische Messtechnik und Grundlagen der Elektrotechnik, Dissertation, Oktober 2007. – URL <http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00022044> URN (NBN): urn:nbn:de:gbv:084-17657
- [63] KOLBUS, M. ; MAASS, J. ; REISINGER, T.: Robot control based on skill primitives. In: *Proc. of IASTED Conf. on Robotics and Applications*. Cambridge, USA, 2005, S. 260 – 266
- [64] KOLBUS, M. ; STACHERA, K. ; SCHUMACHER, W.: Estimation of the payload mass of a flexible parallel robot. In: *Proc. of Parallel Kinematics Seminar 2006*. Chemnitz, Deutschland, 25 - 26 April 2006
- [65] KOLBUS, M. ; WOBBE, F. ; ALGERMISSEN, S. ; K. STACHERA ; SINAPIUS, M. ; W. SCHUMACHER: Sliding mode control of a parallel robot with robust vibration control. In: *Proc. of the 9th International Conference on Motion and Vibration Control, Munich, Germany, 15 - 18 September 2008*
- [66] KOZAK, K. ; EBERT-UPHOFF, I. ; SINGHOSE, W.: Analysis of varying natural frequencies and damping ratios of a sample parallel manipulator throughout its workspace using linearized equations of motion. In: *Proc. of 2001 ASME Design Engineering Technical Conferences (DETC)*. Pittsburgh, Pennsylvania, USA : ASME, 9 - 12 September 2001

- [67] KREFFT, M. ; HESSELBACH, J.: Elastodynamic optimization of parallel kinematics. In: *Proc. of IEEE International Conference on Automation Science and Engineering*. Edmonton, Kanada, 2005, S. 357 – 362
- [68] KREFFT, M. ; HESSELBACH, J.: A way to the optimal design of parallel robots with high dynamic capabilities. In: *Proc. of IASTED Int. Conf. on Robotics and Applications - RA*. Cambrige, USA, 2005, S. 249 – 254
- [69] KUGI, A. ; SCHLACHER, K.: Passivitätsbasierte Regelung piezoelektrischer Strukturen. In: *Automatisierungstechnik*, Oldenbourg Verlag 50 (2002), September, S. 422 – 431
- [70] KURATLE, R.H. ; SIGNER, A.: Robuste Signale von mechanischen Messgrößen. In: *Bericht, Kistler Instrumente AG Winterthur, Schweiz* (2008). – URL www.kistler.com
- [71] LAMMERING, R. ; WIESEMANN, S. ; CAMPANILE, L. F. ; MELCHER, J.: Design, optimization and realization of smart structures. In: *Smart Materials and Structures* 9 (2000), S. 260 – 266
- [72] LAST, P. ; HESSELBACH, J.: *Advances in Robot Kinematics: Mechanisms and Motion*. Kap. A new calibration strategy for a class of parallel mechanisms, S. 331–338, Springer Netherlands, Oktober 2006
- [73] LAST, P. ; HESSELBACH, J. ; WAHL, F.-M.: Robotersysteme für Handhabung und Montage. Hochdynamische Parallelstrukturen mit adaptronischen Komponenten. In: *atp - Automatisierungstechnik Praxis*, Oldenbourg Verlag 12 (2004), S. 52 – 59
- [74] LAST, P. ; HESSELBACH, J. ; WAHL, F.-W.: Hochdynamische Parallelroboter im Bereich Handhabung und Montage. In: *In: Tagungsband zum GMA Kongress (VDI-Berichte Nr. 1883)*, Baden Baden, Germany, 2005, S. 243 – 253
- [75] LEVINE, W. S. (Hrsg.): *The Control Handbook*. CRC Press and IEEE Press, 1996
- [76] LJUNG, L.: *System Identification: Theory for the user*. 1. Upper Saddle River, NJ 07458, USA : Prentice-Hall, 1987. – 519 S. – ISBN 0-13-881640-9
- [77] LORENZ, B.: Implementierung eines Parallelroboter – Modells in Simpack / Studienarbeit, TU Braunschweig, Institut für Regelungstechnik. März 2002. – Forschungsbericht
- [78] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1,2*. Heidelberg : Springer Verlag, 2001
- [79] LUTZ, H. ; WENDT, W.: *Taschenbuch der Regelungstechnik mit Matlab und Simulink*. 7. ergänzte Auflage. Harri Deutsch Verlag, 2007. – 1356 S. – ISBN 978-3-8171-1807-6
- [80] MAASS, J. ; KOHN, N. ; HESSELBACH, J.: Open Modular Robot Control Architecture for Assembly Using the Task Frame Formalism. In: *International Journal of Advanced Robotic Systems (ARS)* 3 (2006), März, Nr. 1, S. 1 – 10
- [81] MAGNUS, K. ; POPP, K.: *Schwingungen*. Stuttgart : Teubner Studienbücher, Mechanik, 1997. – 400 S
- [82] MASARATI, P. ; MORANDINI, M. ; RIEMENSCHNEIDER, J. ; WIERACH, P. ; GLUHH, S. ; BARKANOV, E.: Optimal design of an active twist 1:2.5 scale rotor blade. In: *31st European Rotorcraft Forum*. Florence, Italy, 13 - 15 September 2005
- [83] MEKID, S. ; LIM, B.: Characteristics comparison of piezoelectric actuators at low electric field: analysis of strain and blocking force. In: *Smart Materials and Structures* 13 (2004), September, Nr. 5, S. N93–N98. – URL <http://stacks.iop.org/0964-1726/13/N93>

- [84] MERLET, J.-P.: *Parallel Robots*. Netherlands : Kluwer Academics Publishers, 2000. – 355 S
- [85] MICHALIK, H. ; DADJI, Y. ; MAASS, J.: A communication architecture for support of distributed computing in real-time environments. In: SCHUETZ, D. (Hrsg.) ; RAATZ, A. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 3rd International Colloquium of the Collaborative Research Center SFB 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Braunschweig, Germany : Fortschritte in der Robotik Band 14, Shaker Verlag, 28- 29 April 2008, S. 127 – 140
- [86] MILLER, K. ; CLAVEL, R.: The Lagrange-based model of Delta-4 robot dynamics. In: *Robotersysteme, Springer Verlag, Germany* 8 (1992), S. 49–54
- [87] MOALLEM, M. ; PATEL, R. V. ; KHORASANI, K.: *Flexible-link robot manipulators: Control techniques and structural design* , Springer-Verlag. Bd. Lecture Notes in Control and Information Sciences 257. London, Great Britain : Springer Verlag, 2000
- [88] MOALLEM, M. ; PATEL, R. V. ; KHORASANI, K.: Nonlinear tip-position tracking control of a flexible-link manipulator: Theory and Experiments. In: *Automatica* 37 (2001), S. 1825 – 1834
- [89] MURRAY, R. M. ; LI, Z. ; SASTRY, S. S.: *A mathematical introduction to robotic manipulation*. USA : CRC Press LLC, 1994. – 456 S
- [90] MÄRTENS, M.: *Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren*, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Dissertation, Dezember 1999. – Mitteilung Nr. 118
- [91] NAKAMURA, Y.: *Advanced robotics: redundancy and optimization*. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1991. – 337 S
- [92] NAKAMURA, Y. ; GHODOUSSI, M.: Dynamics computation of closed-link robot mechanisms with nonredundant and redundant actuators. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 5 (1989), Juni, Nr. 3, S. 294–302
- [93] NEUGEBAUER, R. ; DROSSEL, W.-G. ; IHLENFELDT, S. ; ROSCHER, H.-J.: Hybrid struts with smart piezoactuators for high dynamic parallel kinematics. In: KREFFT, M. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 1st International Colloquium of the Collaborative Research Centre 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Aachen : Shaker Verlag, 29 - 30 Mai 2002, S. 131 – 140
- [94] NOLTING, W.: *Grundkurs Theoretische Physik 2*. 7. Auflage. Springer Berlin Heidelberg, 2006. – 90 S
- [95] OTREMBA, R.: *Systematische Entwicklung von Gelenken für Parallelroboter*, Dissertation, TU Braunschweig, Berichte aus der Konstruktionstechnik Bd. 67., Logos Verlag (ISBN 3-8325-0811-2), Berlin, Dissertation, 2005
- [96] PARK, F. C. ; CHOI, J. ; PLOEN, S. R.: Symbolic formulation of closed chain dynamics in independent coordinates. In: *Pergamon: Mechanism and Machine Theory* 34 (1999), S. 731–751
- [97] PAVLOVIC, N. ; KEIMER, R. ; FRANKE, H.-J.: Systematic development of adaptronic joints for parallel kinematic structures. In: *Proc. of 8th International IFAC Symposium on Robot Control (SyRoCo)*. Bologna, Italy, 6 - 8 September 2006
- [98] PEŁCZEWSKI, W.: *Teoria Sterowania*. 1. Edition. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1980. – 579 S

- [99] PIEDBOEUF, J.-C.: Six methods to model a flexible beam rotating in the vertical plane. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Seul, Korea : IEEE, Mai 2001, S. 2832 – 2839
- [100] PIETSCH, I. ; BIER, C. ; BECKER, O. ; HESSELBACH, J.: Time-optimal trajectory planning for parallel robots. In: *Proc. of the 18th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2005), CD Annals*. Ouro Preto, Brasilien, November 2005
- [101] PIEZOMECHANIK - DR. LUTZ PICKELMANN GMBH: *Electronic supplies for piezomechanics - Amplifiers, Pulsers, PC cards*. Juni 2003. – URL www.piezomechanik.com
- [102] PIEZOMECHANIK - DR. LUTZ PICKELMANN GMBH: *Piezo-mechanical and electrostrictive stack and ring actuators: Product range and technical data*. Oktober 2006. – URL www.piezomechanik.com
- [103] PING, J. ; WU, H.: An efficient approach to the forward kinematics of a planar parallel manipulator with similar platforms. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 18 (2002), August, Nr. 4, S. 647 – 649
- [104] REISINGER, T.: *Kontaktregelung von Parallelrobotern auf der Basis von Aktionsprimitiven*, Technische Universität Braunschweig, Institut für Regelungstechnik, Dissertation, 2008. – URL <http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00022368>
- [105] ROBINETT, R. D. ; DOHRMANN, C. ; EISLER, G. R. ; FEDDEMA, J. ; PARKER, G. G. ; WILSON, D. G. ; STOKES, D.: *Flexible robot dynamics and controls*. New York, USA : Kluwer Academic/Plenum Publishers: International Federation for System Research - IFSR, 2002. – 339 S
- [106] RODDECK, W.: *Einführung in die Mechatronik*. B. G. Teubner Stuttgart, 1997. – 441 S
- [107] ROSE, M.: Modal based correction methods for the placement of piezoceramic modules. In: *Proc. of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. Orlando, Florida, USA, 5 - 11 November 2005
- [108] ROSE, M. ; KEIMER, R.: Parallelroboter mit adaptronischen Komponenten - Sonderforschungsbereich 562. In: *In: Adaptronic Congress*. Potsdam, Deutschland, 23 - 24 April 2002
- [109] ROSE, M. ; KEIMER, R. ; ALGERMISSSEN, S.: Vibration suppression on high speed parallel robots with adaptronic components. In: *Proc. of 10th International Congress on Sound and Vibration (ICSV)*. Stockholm, Sweden, 2003
- [110] ROSE, M. ; KEIMER, R. ; BREITBACH, E. J. ; CAMPANILE, L. F.: Parallel robots with adaptronic components. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 15 (2004), September/Okttober, S. 763 – 769
- [111] ROSE, M. ; SACHAU, D.: Multibody systems with distributed piezoelectric actors and sensors in flexible Bodies. In: *ASME Design Engineering Technical Conferences*. Pittsburgh, USA, 9 - 12 September 2001
- [112] SAHA, S. K.: A decomposition of the manipulator inertia matrix. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 13 (1997), April, Nr. 2, S. 301–304
- [113] SCHAUMBURG, H.: *Sensoren. Werkstoffe und Bauelemente der Elektrotechnik*. B.G.Teubner, Stuttgart, 1992
- [114] SCHNELL, W. ; GROSS, D. ; HAUGER, W.: *Technische Mechanik 2*. 5. Auflage. Springer, 1995. – 231 S

- [115] SCHUMACHER, W.: *Grundlagen der Regelungstechnik, Umdruck zur Vorlesung*. Technische Universität Braunschweig, Institut für Regelungstechnik, 2006. – 309 S. – <http://www.ifr.ing.tu-bs.de/lehre/downloads/skripte/>
- [116] SCHUMACHER, W. ; KOLBUS, M. ; MAASS, J. ; REISINGER, T.: Control structures for implementing skill primitives. In: LAST, P. (Hrsg.) ; BUDDE, C. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 2nd International Colloquium of the Collaborative Research Centre 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Aachen : Shaker Verlag, 10 - 11 Mai 2005, S. 77 – 92
- [117] SCHWERTASSEK, R. ; WALLRAPP, O.: *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*. Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 1999
- [118] SCHÜLLER, J.: Aktive Schwingungskompensation eines ebenen Fünfgelenkes durch Integration von Piezoaktoren / Studienarbeit, DLR, Institut für Strukturmechanik, Braunschweig, IB 131-2002/23. 2002. – Forschungsbericht
- [119] SICILIANO, B. ; BOOK, W. J.: A singular perturbation approach to control of light-weight flexible manipulators. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 7 (1988), August, Nr. 4, S. 79 – 90
- [120] SONG, S. K. ; KWON, D.-S.: New methodology for the forward kinematics of 6-dof parallel manipulators using tetrahedron configurations. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Seoul, Korea : IEEE, 21 - 26 Mai 2001, S. 1307 – 1312
- [121] SPONG, M. W. ; VIDYASAGAR, M.: *Robot dynamics and control*. USA : John Wiley and Sons, Inc., 1989
- [122] STACHERA, K.: An approach to direct kinematics of a planar parallel elastic manipulator and analysis for the proper definition of its workspace. In: *Proc. of the 11th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*. Miedzyzdroje, Poland : IEEE, 29 August - 1 September 2005
- [123] STACHERA, K.: An approach for the simultaneous calculation of the direct dynamics of parallel manipulators. In: *Proc. of the 12th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*. Miedzyzdroje, Poland : IEEE, 28-31 August 2006, S. 751 – 758
- [124] STACHERA, K.: A new method for the direct dynamics' calculation of parallel manipulators. In: *Proc. of the 6th World Congress on Intelligent Control Automation (WCICA)*. Dalian, China : IEEE, 21-23 Juni 2006
- [125] STACHERA, K.: Vibration suppression on the parallel manipulators. In: *Proc. of the 9th Polish National Conference on Robotic*. Piechowice, Poland : WKŁ, 13 - 16 September 2006. – (in polish)
- [126] STACHERA, K. ; SCHUMACHER, W.: Robust vibration control of flexible planar parallel robot. In: *Proc. of the 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*. Miedzyzdroje, Poland : IEEE, 25 - 29 August 2003
- [127] STACHERA, K. ; SCHUMACHER, W.: Simultaneous calculation of the direct dynamics of the elastic parallel manipulators. In: *Proc. of the 13th IEEE IFAC International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*. Szczecin, Poland, 27 - 30 August 2007

- [128] STACHERA, K. ; SCHUMACHER, W.: *Automation and Robotics*. Kap. Derivation and calculation of the dynamics of elastic parallel manipulators, S. 261 – 276, I-Tech Education and Publishing, Vienna, Austria, Mai 2008. – URL www.i-techonline.com. – ISBN 978-3-902613-41-7
- [129] STACHERA, K. ; WOBBE, F. ; SCHUMACHER, W.: Jacobian-based derivation of dynamics equations of elastic parallel manipulators. In: *Proc. of the IASTED Asian Conference on Modelling and Simulation (AsiaMS 2007)*. Beijing, China, 8 - 10 Oktober 2007
- [130] STARK, H.: Entwurf eines Fünfgelenkes und Simulation mit dem Mehrkörpersimulationsprogramm Simpack – Konstruktiver Entwurf / Studienarbeit, DLR, Institut für Strukturmechanik, Braunschweig, IB 131-2002/22. 2002. – Forschungsbericht
- [131] STEARNS, S.D. ; HUSH, D.R.: *Digitale Verarbeitung analoger Signale*. 7. Oldenbourg Verlag München Wien, 1999. – 571 S
- [132] STRAUBEL, M.: Robuste Regelung von Strukturschwingungen am Parallelroboter Fünfgelenk / Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.(DLR), Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Institut für Mechanik, Diplomarbeit. 2006. – Forschungsbericht
- [133] TALEBI, H. A. ; PATEL, R. V. ; KHORASANI, K.: *Control of flexible-link manipulators using neural networks*. Bd. Lecture Notes in Control and Information Sciences 261. London, Great Britain : Springer Verlag, 2001
- [134] TCHOŃ, K. ; MAZUR, A. ; DULĘBA, I. ; HOSSA, R. ; MUSZYŃSKI, R. ; BOLC, L. (Hrsg.): *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000 (Problemy Współczesnej Nauki, Teoria i Zastosowania, Robotyka). – 431 S
- [135] THEINGI ; CHUAN, L. ; CHEN, I-M. ; ANGELES, J.: Singularity management of 2DOF planar manipulator using coupled kinematics. In: *Proc. of 7th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*, Singapore, Dezember 2002, S. 402 – 407
- [136] TSAI, L.-W.: *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. USA : John Wiley and Sons, Inc., 1999. – 505 S
- [137] WANG, J. ; GOSSELIN, C.: Parallel computational algorithms for the simulation of closed-loop robotic systems. In: *Proc. of the International Conference on Parallel Computing Applications in Electrical Engineering (PARELEC'2000)*. Washington, DC, USA : IEEE Computer Society, 2000, S. 34 – 38
- [138] WANG, J. ; GOSSELIN, C. M. ; CHENG, L.: Modeling and simulation of robotic systems with closed kinematic chains using the virtual spring approach. In: *Kluwer Academic Publishers, Springer Netherlands, Multibody System Dynamics* 7 (2002), März, Nr. 2, S. 145 – 170
- [139] WANG, X. ; MILLS, J. K.: A FEM model for active vibration control of flexible linkages. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. New Orleans, USA : IEEE, April 2004, S. 4308–4313
- [140] WANG, X. ; MILLS, J. K.: Substructuring dynamic modeling and active vibration control of a smart parallel platform. In: *Proc. of 2004 ASME International Mechanical Engineering Congress (IMECE2004)*. Anaheim, California, USA : ASME, 13 - 19 November 2004, S. 1 – 8

- [141] WENGER, P.: Dealing with singularities in planar parallel manipulators. In: SCHUETZ, D. (Hrsg.) ; RAATZ, A. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proc. of the 3rd International Colloquium of the Collaborative Research Center SFB 562 - Robotic Systems for Handling and Assembly*. Braunschweig, Germany : Fortschritte in der Robotik Band 14, Shaker Verlag, 28- 29 April 2008, S. 23 – 36
- [142] WEYER, K.: Integration einer Roboterzelle in eine Verpackungslösung, Steuerung mit Roboterfunktionen inklusive. In: *elektro AUTOMATION* 1 (2006), S. 60 – 61. – URL www.ea-online.de
- [143] WIERACH, P.: Entwicklung multifunktionaler Werkstoffsysteme mit piezokeramischen Folien im Leitprojekt Adaptronik. In: *Adaptronic Congress*, April 2003
- [144] WIERACH, P. ; SCHÖNECKER, A.: Bauweisen und Anwendungen von Piezokompositen in der Adaptronik. In: *Adaptronic Congress*. Göttingen, Germany, 31 - 1 Juni 2005, S. 1 – 11
- [145] WILSON, D. G. ; STARR, G. P. ; PARKER, G. G. ; ROBINETT, R. D.: Robust control design for flexible - link / flexible - joint robots. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. San Francisco, USA : IEEE, April 2000, S. 1496 – 1500
- [146] WORSNOPP, T. ; PESHKIN, M. ; LYNCH, K. ; COLGATE, J. E.: Controlling the apparent Inertia of passive human-interactive robots. In: *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 128 (2006), März, S. 44 – 52
- [147] YANG, H. ; KRISHNAN, H. ; ANG, M. H.: Tip-trajectory tracking control of single-link flexible robots by output redefinition. In: *Proc. of IEE Control Theory and Applications* Bd. 147, IEE, November 2000, S. 580 – 587
- [148] YIU, Y. K. ; CHENG, H. ; XIONG, Z. H. ; LIU, G. F. ; LI, Z. X.: On the dynamics of parallel manipulators. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Seul, Korea : IEEE, 21 - 26 Mai 2001, S. 3766 – 3771
- [149] YOSHIKAWA, T. ; OHTA, A. ; KANAOKA, K.: State estimation and parameter identification of flexible manipulators based on visual sensor and virtual joint model. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. Seul, Korea : IEEE, 21 - 26 Mai 2001, S. 2840 – 2845
- [150] ZALEWSKI, A. ; CEGIEŁA, R.: *Biblioteka Użytkownika Mikrokomputerów*. Bd. 25: *Matlab - obliczenia numeryczne i ich zastosowania*. Wydawnictwo Nakom, Poznań, 1997. – 407 S. – ISBN 83-85060-85-5

